

# 有限元强度折减法中安全系数的搜索算法

陈 曦, 刘春杰

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘 要:** 有限元强度折减法作为一种较新的方法已经被广泛用于岩土工程问题的稳定性分析, 如边坡分析。然而, 常用的安全系数搜索方法如二分法效率较低, 为了更加高效地使用有限元强度折减法进行岩土工程问题的稳定性分析, 提出一种基于统计意义的  $\alpha$  搜索算法, 而二分法可以看作为此  $\alpha$  搜索算法的一种特殊情况, 即  $\alpha = 0.5$ 。通过三维边坡的数值算例和若干其他算例, 证实了与常用的安全系数搜索算法相比,  $\alpha$  搜索算法在所建议的  $\alpha$  范围内通常更加有效。

**关键词:** 边坡稳定; 剪切强度折减; 有限元法; 安全系数; 搜索算法;  $\alpha$  搜索

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000 - 4548(2010)09 - 1443 - 05

**作者简介:** 陈 曦(1977 - ), 男, 北京交通大学副教授, 主要从事岩土工程数值计算方法等方面的研究。E-mail: chenxi@bjtu.edu.cn。

## Search algorithms for safety factor in finite element shear strength reduction method

CHEN Xi, LIU Chun-jie

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The shear strength reduction finite element method as a recent development has been widely adopted for geotechnical stability analysis such as the slope analysis. In the shear strength reduction finite element method, however, the commonly used bracketing and bisection search algorithm for the safety factor may not be effective. To efficiently conduct the shear strength reduction finite element method, a bracketing and  $\alpha$ -section search algorithm is proposed from the statistical point of view. Numerical simulations of 3D slope examples and some other examples show that compared with the commonly adopted search algorithms, the new  $\alpha$ -section search algorithm is generally more efficient in the advised  $\alpha$  range.

**Key words:** slope stability; shear strength reduction; finite element method; safety factor; search algorithm;  $\alpha$ -section search

## 0 引 言

在岩土工程领域, 边坡稳定分析已经得到了广泛的研究<sup>[1]</sup>。传统上, 边坡稳定分析采取极限平衡法, 而有限元强度折减法则是一项较新的技术。强度折减的思想最早由 Zienkiewicz 等人<sup>[2]</sup>提出, 并得到广泛的研究和应用, 其中包括 Matsui 和 San<sup>[3]</sup>, Griffiths 和 Lane<sup>[4]</sup>, 连镇营等<sup>[5]</sup>, 赵尚毅等<sup>[6]</sup>, 郑宏等人<sup>[7]</sup>的工作。同极限平衡法相比, 采用有限元强度折减法进行边坡稳定性分析的优势可以概括为: ①采用有限元强度折减法, 不需要像极限平衡法一样对滑动面的位置或形状作出假设; ②有限元强度折减法可以很容易地结合一些经典弹塑性材料模型, 例如 Mohr-Coulomb 模型和 Drucker-Prager 模型; ③复杂的几何形状、边界条件和荷载条件的处理都比较容易; ④初始地应力场可以通过计算或输入得到; ⑤可以监测整个求解域的应

力和变形的演变。可见, 同极限平衡法相比, 最重要的是有限元强度折减法是一种有效的复杂边坡稳定分析的工具。

在有限元强度折减法中, 安全系数搜索算法的性能至关重要, 并显著影响着整个计算的效率。安全系数搜索算法中, 最常用的是二分法<sup>[8]</sup>, 而增量细化搜索法<sup>[9]</sup>也较为常用。值得注意的是二分法并未考虑非线性迭代次数在搜索范围内的分布特点: 即在搜索范围的收敛区间内非线性迭代次数通常很小, 而在非收敛区间内非线性迭代次数为用户设定的最大非线性迭代次数。为了有效识别边坡失稳破坏或伴随边坡失稳而发生的显著节点位移, 用户设定的这个最大非线性迭代次数通常很大, 其具体取值也需要综合考虑计算精度和计算耗时。很明显, 二分法同等对待了收敛区

收稿日期: 2010 - 04 - 07

间和非收敛区间。根据这些观察,本文提出一种 $\alpha$ 搜索方法,而二分法则可以作为 $\alpha$ 搜索方法的一种特殊情况。通过三维边坡的有限元模拟,比较了二分法, $\alpha$ 搜索方法和增量细化搜索方法在有限元强度折减法中的计算效率。

## 1 边坡稳定的强度折减法

当使用莫尔-库仑破坏准则时,剪切强度可以表示为

$$\tau_f = c + \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

式中,黏聚力 $c$ 和内摩擦角 $\varphi$ 是两个基本强度参数。强度折减法通过减小这两个抗剪强度参数来折减剪切强度,即

$$\left. \begin{aligned} c_r &= c/\text{SRF}_c \\ \tan \varphi_r &= \tan \varphi/\text{SRF}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $\text{SRF}_c$ 和 $\text{SRF}_\varphi$ 分别是对应黏聚力和内摩擦角的强度折减系数,且通常假设 $\text{SRF}_c = \text{SRF}_\varphi = \text{SRF}$ 。给定非线性迭代法的最大允许迭代次数和收敛允许误差,如果所采用的非线性迭代方法不收敛,则表明边坡失稳并伴随着显著的节点位移。在有限元强度折减法中,非线性迭代方法从收敛状态过度到非收敛状态的临界点所对应强度折减系数的被定义为安全系数,即 $\text{FOS} = \text{SRF}$ 。

## 2 关于安全系数的搜索算法

可以看出,在有限元强度折减法中,对于非线性迭代方法从收敛状态过度到非收敛状态的临界点所对应强度折减系数的搜索算法十分重要,一个高效的搜索方法可以显著减少整个搜索所需要的时间。下面首先介绍最常用的二分搜索算法,即二分法。

### 2.1 二分法

给定搜索范围 $[a_0, b_0]$ ,希望找到安全系数 $\text{FOS} = c \in [a_0, b_0]$ ,使得当 $\text{SRF} \in [a_0, c]$ 时非线性迭代法收敛,而当 $\text{SRF} \in (c, b_0]$ 时非线性迭代法在给定的最大允许迭代次数内不收敛。二分法搜索临界点 $c$ 的公式如下:

若非线性迭代法在 $(a_{k-1} + b_{k-1})/2$ 点收敛时,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}, \quad b_k = b_{k-1} \quad (3)$$

若非线性迭代法在 $(a_{k-1} + b_{k-1})/2$ 点不收敛时,

$$a_k = a_{k-1}, \quad b_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \quad (4)$$

其中下标索引 $k \geq 1$ 表示搜索迭代。由于强度折减系数定义为 $\text{SRF}_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2$ ,折减后的抗剪强度参数分别表示为

$$\left. \begin{aligned} c_k &= c/\text{SRF}_k \\ \tan \varphi_k &= \tan \varphi/\text{SRF}_k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当满足下面收敛准则时,搜索算法收敛并且终止搜索。

$$b_k - a_k = (b_0 - a_0) \frac{1}{2^k} \leq \epsilon \quad (6)$$

其中 $\epsilon$ 是收敛允许误差。因此,达到收敛时迭代次数至少为

$$k \geq k_\epsilon = \ln \frac{(b_0 - a_0)}{\epsilon} \quad (7)$$

当满足方程(6)时,安全系数则可以通过定义 $\text{FOS} = \text{SRF}_k$ 而获得。在二分法中,对于每次搜索尝试,非线性迭代法收敛和不收敛的概率是相等的。因此,所需总的非线性迭代次数可估算如下

$$\left. \begin{aligned} \text{it\_nl\_tot} &\approx \text{maxit\_nl} \times k_\epsilon \times 50\% + \\ &\quad \text{it\_nl\_ave} \times k_\epsilon \times 50\% \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中, $\text{maxit\_nl}$ 为最大允许迭代次数, $\text{it\_nl\_tot}$ 是估算的总的非线性迭代次数, $\text{it\_nl\_ave}$ 为收敛情况下的非线性迭代次数的平均值。

### 2.2 $\alpha$ 搜索算法

图1示意性给出了非线性迭代次数与 $\text{SRF} \in [a_0, b_0]$ 之间的关系。可见,当 $\text{SRF} \in [a_0, c]$ 时所需的非线性迭代次数要远小于 $\text{SRF} \in (c, b_0)$ 时所需的非线性迭代次数。作为二分搜索法的泛化方法, $\alpha$ 搜索算法倾向于更多地在收敛区间范围内搜索,其迭代框架类似于式(3)和式(4),概括如下:

若非线性迭代法在 $a_{k-1}(1-\alpha) + b_{k-1}\alpha$ 点收敛时,

$$a_k = a_{k-1}(1-\alpha) + b_{k-1}\alpha, \quad b_k = b_{k-1} \quad (9)$$

若非线性迭代法在 $a_{k-1}(1-\alpha) + b_{k-1}\alpha$ 点不收敛时,

$$a_k = a_{k-1}, \quad b_k = a_{k-1}(1-\alpha) + b_{k-1}\alpha \quad (10)$$

式中, $\alpha$ 是一个分数且取值范围为 $\alpha \in (0, 1/2]$ 。当 $\alpha = 1/2$ 时, $\alpha$ 搜索算法退化为二分法。 $\alpha$ 搜索算法有下面两个极限情况:

搜索区域收缩速度最快情况,

$$(b_0 - a_0)\alpha^k \leq \epsilon \quad (11)$$

搜索区域收缩速度最慢情况,

$$(b_0 - a_0)(1-\alpha)^k \leq \epsilon \quad (12)$$

显然,当 $c \approx a_0$ 时属于搜索区域收缩最快的情况,当 $c \approx b_0$ 时属于搜索区域收缩最慢的情况。对于这两种情况,所需搜索迭代次数可估算如下:

对于搜索区域收缩速度最快情况,

$$k \geq k_\epsilon^{(\alpha)} = \log_{\frac{1}{\alpha}} \frac{(b_0 - a_0)}{\epsilon} \quad (13)$$

对于搜索区域收缩速度最慢情况,

$$k \geq k_\epsilon^{(1-\alpha)} = \log_{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(b_0 - a_0)}{\epsilon} \quad (14)$$

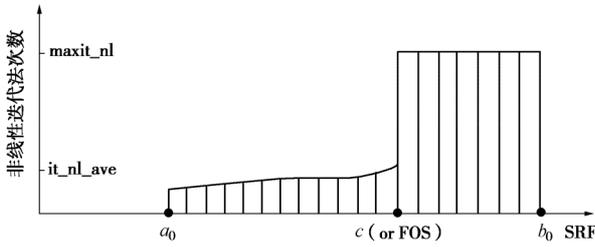


图 1 收敛和不收敛区域内所需的非线性迭代次数示意图

Fig. 1 Schematic diagram of nonlinear iterative number in convergence and non-convergence regions

迭代完成后, 安全系数可通过  $FOS = SRF_k$  获得。当假设  $maxit\_nl \gg it\_nl\_ave$ , 对于搜索区域收缩最快的情况, 则非线性迭代所需的总次数最大, 而对于搜索区域收缩最慢的情况, 非线性迭代所需的总次数最小。这两个极限情况估算如下:

估算所需非线性迭代总次数的最大值为

$$it\_nl\_tot \approx maxit\_nl \times k_\epsilon^{(\alpha)} \quad ; \quad (15)$$

估算所需非线性迭代总次数的最小值为

$$it\_nl\_tot \approx it\_nl\_ave \times k_\epsilon^{(1-\alpha)} \quad ; \quad (16)$$

最终所需非线性迭代总次数可估算为

$$it\_nl\_tot \approx maxit\_nl \times k_\epsilon^{(\alpha)} \times \alpha + it\_nl\_ave \times k_\epsilon^{(1-\alpha)} \times (1-\alpha) \quad (17)$$

### 2.3 增量细化搜索算法

与  $\alpha$  搜索算法不同, 增量细化搜索算法在搜索范围未收缩前采用固定的增量。在增量细化搜索算法中, 若非线性迭代法在  $a_{i+1} + (b_{i+1} - a_{i+1})j\beta$  点收敛, 搜索范围  $[a_i, b_i]$  不变, 试验点继续移到下一点

$$a_{i+1} + (b_{i+1} - a_{i+1})(j+1)\beta, \quad (j=1, \dots, 1/\beta-2) \quad (18)$$

若非线性迭代法在  $a_{i+1} + (b_{i+1} - a_{i+1})j\beta$  点不收敛, 则搜索范围的两个边界更新为

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_{i+1} + (b_{i+1} - a_{i+1})(j-1)\beta, \\ b_i &= a_{i+1} + (b_{i+1} - a_{i+1})j\beta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中  $\beta \in (0, 1/2]$ , 索引  $i$  代表搜索范围两个边界更新的层级, 而索引  $j$  代表在每个层级上的均匀测试点。可见, 当  $\beta=1/2$  时增量细化搜索算法也退化为二分法。增量细化搜索算法也有两个极限情况:

对于搜索区域收缩速度最快情况,

$$(b_0 - a_0)\beta^k \leq \epsilon \quad (20)$$

对于搜索区域收缩速度最慢情况,

$$(b_0 - a_0)\beta^{\lfloor (k+1)\beta \rfloor} \leq \epsilon \quad (21)$$

这里, floor 是向负无穷方向的取整操作。相应地, 所需非线性迭代的总次数可由下面两个极限估算

$$\left. \begin{aligned} k &\geq k_\epsilon^{(\beta)} = \log_{\frac{1}{\beta}} \frac{(b_0 - a_0)}{\epsilon}, \\ \text{floor}[(k+1)\beta] &\geq k_\epsilon^{(\beta)} = \log_{\frac{1}{\beta}} \frac{(b_0 - a_0)}{\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

### 3 三维边坡算例

岩土工程非线性有限元模拟通常采用 Newton-Raphson 非线性迭代。Newton-Raphson 等非线性迭代法收敛可依据不同的收敛判别准则, 如基于位移的判别准则和基于不平衡力的判别准则。这里采用了基于不平衡力的收敛判别准则。对于每一个 Newton-Raphson 非线性迭代步所产生的线性方程组, 这里采用波前直接求解法。值得说明的是, 对于大规模尤其是三维岩土工程问题数值离散产生的大型线性方程组, 迭代求解法通常更加有效<sup>[10]</sup>。然而, 在非线性的迭代框架中使用线性迭代法时, 需要评价和排除非线性迭代的不收敛是否是由于线性迭代法不收敛引起的可能性<sup>[11]</sup>。

Griffiths 和 Lane<sup>[4]</sup> 在 1999 年研究了一个有趣的夹有薄弱层的二维边坡例子。这里则采用三维有限元法的对此问题进行研究, 如图 2 所示的三维有限元网格含有 336 个 20 节点六面体单元 ( $L/H=2$ )。不排水边坡的抗剪强度  $\phi_u=0^\circ$ ,  $c_{u1}=0.25\gamma H$ , 薄弱层则考虑 3 种不同的情况:  $c_{u2}/c_{u1}=1.0, c_{u2}/c_{u1}=0.6$  和  $c_{u2}/c_{u1}=0.2$ 。3 种情况下, 边坡破坏时位移模的阴影图分别见图 2 (b)、2 (c) 和 2 (d)。从图 2 (b)、2 (c) 和 2 (d) 可见, 对于 3 种不同  $c_{u2}/c_{u1}$  比率的情况, 相应的 3 个破坏机理明显不同。图 2 (b) 所示为均质土体, 边坡滑动面不受“夹层”影响。当比率  $c_{u2}/c_{u1}$  降为 0.6, 贯穿滑动面中间部分受到薄弱夹层控制, 坡脚的滑动面则完全由薄弱层控制。随着薄弱层进一步削弱, 当  $c_{u2}/c_{u1}=0.2$  时, 边坡的滑动面与薄弱层完全吻合。表 1 提供了不同的搜索方法返回的安全系数 FOS, 未收敛次数  $nc$  和累计总的非线性迭代次数  $it\_nl\_tot$ 。表中也给出了 Rocscience 公司<sup>[12]</sup>计算的安全系数以供参考, 但其计算采用二维平面应变分析, 单元分别为 6 节点三角形单元和 8 节点四边形单元。可以看出, 当  $c_{u2}/c_{u1}=1.0$  时, 3 种搜索算法计算所得安全系数位于 [1.4808, 1.4813] 之间, 与 Rocscience 公司采用个 6 节点三角形单元时计算的 1.45 和 8 节点四边形单元计算的 1.47 相近。当  $c_{u2}/c_{u1}=0.6$  时, 3 种搜索算法计算的安全系数在 [1.4006, 1.4008] 之间变化, Rocscience 公司采用 6 节点三角形单元和 8 节点四边形单元时计算所得安全系数都为 1.35。当  $c_{u2}/c_{u1}=0.2$  时, 3 种搜索算法计算所得安全系数变化区间 [0.6016, 6309] 较

表 1 根据不同搜索方法获得的安全系数, nc 和 it\_nl\_tot (给定 $[a_0, b_0] = [0.5, 3.0]$ , maxit\_nl = 1000, tol\_nl = 0.001,  $\epsilon = 0.001$ )

Table 1 Values of safety factor, nc and the required total number of nonlinear iterations it\_nl\_tot returned by different search methods (Set  $[a_0, b_0] = [0.5, 3.0]$ , maxit\_nl = 1000, tol\_nl = 0.001,  $\epsilon = 0.001$ )

| $c_{u2}/c_{u1}$                   |             | 1.0      | 0.6      | 0.2      |
|-----------------------------------|-------------|----------|----------|----------|
| Rocscience Inc. [12]              | 安全系数        | 1.45(T6) | 1.35(T6) | 0.62(T6) |
|                                   |             | 1.47(Q8) | 1.35(Q8) | 0.59(Q8) |
| 二分法                               | 安全系数        | 1.4808   | 1.4009   | 0.6228   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 6        | 7        | 9        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 6066     | 7236     | 9210     |
| $\alpha$ 搜索算法 ( $\alpha = 0.1$ )  | 安全系数        | 1.4811   | 1.4008   | 0.6102   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 2        | 3        | 3        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 2337     | 3489     | 3114     |
| $\alpha$ 搜索算法 ( $\alpha = 0.15$ ) | 安全系数        | 1.4812   | 1.4006   | 0.6161   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 4        | 3        | 4        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 4134     | 3436     | 4169     |
| $\alpha$ 搜索算法 ( $\alpha = 0.2$ )  | 安全系数        | 1.4813   | 1.4005   | 0.6309   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 4        | 6        | 6        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 4473     | 6135     | 6460     |
| 增量细化搜索算法 ( $\beta = 0.1$ )        | 安全系数        | 1.4813   | 1.4008   | 0.6087   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 3        | 5        | 4        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 3524     | 5259     | 4148     |
| 增量细化搜索算法 ( $\beta = 0.15$ )       | 安全系数        | 1.4813   | 1.4001   | 0.6131   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 4        | 5        | 6        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 4320     | 5150     | 6167     |
| 增量细化搜索算法 ( $\beta = 0.2$ )        | 安全系数        | 1.4811   | 1.4008   | 0.6016   |
|                                   | 未收敛次数 (nc)  | 3        | 4        | 6        |
|                                   | 累计总的非线性迭代次数 | 3089     | 4221     | 6091     |

大, 而 Rocscience 公司采用 6 节点三角形单元和 8 节点四边形单元时计算所得安全系数分别为 0.62 和 0.59。除了计算精度, 这里更加关心的是 3 种搜索算法效率的比较。通过这个三维边坡的例子可以看出,  $\alpha$  搜索算法和增量细化搜索算法比二分法效率更高, 计算时间甚至可以节省 50%。而与增量细化搜索算法相比,  $\alpha$  搜索算法通常遇到更少的不收敛点, 因此需要更少的累计非线性迭代次数就可以找到安全系数的参考值。尽管  $\alpha$  搜索算法中  $\alpha$  的取值范围定义为  $\alpha \in (0, 1/2)$ , 一个优化的  $\alpha$  取值可以避免使用过细的搜索或是避免遭遇过多的未收敛次数。通过此三维边坡的例子和其它一些算例,  $\alpha$  在  $[0.15, 0.2]$  范围内取值所导致的搜索效率比较理想。表 1 中仅提供了安全系数的参考值, 为了得到整个边坡内的贯穿滑动面, 则还需要进行第二次搜索循环。

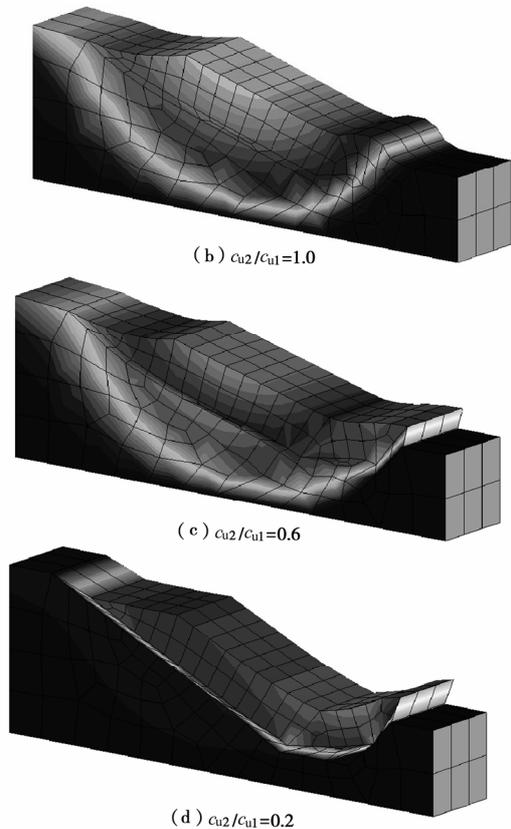
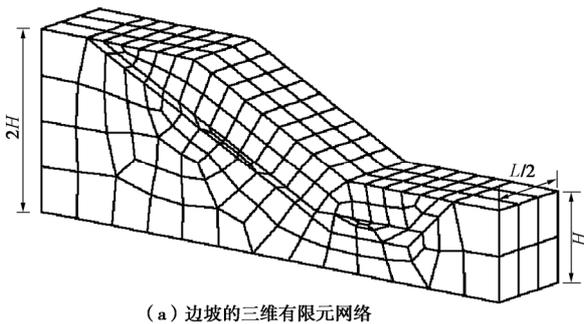


图 2 三种情况下边坡破坏时位移模的阴影图

Fig. 2 Contours of displacement norm for three failure cases

## 4 结 论

有限元强度折减法已广泛用于岩土工程问题的稳定性分析。然而,在有限元强度折减法中,安全系数的搜索算法对安全系数的准确性和整个计算效率至关重要。这里对几种边坡稳定安全系数的搜索算法进行了研究和比较,并得出如下结论:

(1)非线性迭代通常在整个搜索区域内的分布具有鲜明的收敛和不收敛特点,常用的搜索方法如二分法忽视了非线性迭代次数的这一特点。因此,本文提出了一种二分法的泛化方法,即 $\alpha$ 搜索算法。 $\alpha$ 搜索算法的基本原理是:从统计意义上,在所遭遇的非线性迭代不收敛的次数和避免过细搜索之间寻求一个优化。

(2)使用 $\alpha$ 搜索算法时,关键是如何在区间(0, 0.5]内找到优化的 $\alpha$ 值,即达到一种优化使所需的累计非线性迭代次数最小。数值研究表明 $\alpha \in [0.15, 0.2]$ 可以较好地用于实际边坡分析。

### 参考文献:

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese))
- [2] ZIENKIEWICZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and nonassociated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. Géotechnique, 1975, **25**(4): 671 - 89.
- [3] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. Soils and Foundations, 1992, **32**(1): 59 - 70.
- [4] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Géotechnique, 1999, **49**(3): 387 - 403.
- [5] 连锁营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(4): 406 - 411. (LIAN Zhen-ying, HAN Guo-cheng, KONG Xian-jing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(4): 406 - 411. (in Chinese))
- [6] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(3): 343 - 346. (ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(3): 343 - 346. (in Chinese))
- [7] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(5): 626 - 628. (ZHENG Hong, LI Chun-guang, LEE C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(5): 626 - 628. (in Chinese))
- [8] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Géotechnique, 1999, **49**(6): 835 - 840.
- [9] WON J, YOU K, JEONG S, KIM S. Coupled effects in stability analysis of pile-slope systems[J]. Computers and Geotechnics, 2005, **32**(4): 304 - 315.
- [10] CHEN X, TOH K C, PHOON K K. A modified SSOR preconditioner for sparse symmetric indefinite linear systems of equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **65**(6): 785 - 807.
- [11] CHEN X, PHOON K K. Some numerical experiences on convergence criteria for iterative finite element solvers[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(8): 1272 - 1284.
- [12] ROCSCIENCE INC. Application of the finite element method to slope stability[R]. Toronto, 2002.