结合 Bathe 算法及 Signorini 条件求解饱和–非饱和无压渗流问题

骆冠勇，潘 泓

(华南理工大学 亚热带建筑科学国家重点实验室，广东 广州 510641)

摘要：Bathe 算法将浸润面确定问题转变为常规的非线性本构问题，Signorini 条件将出溢面边界转化为常规的水头边界进行处理。由于非饱和渗流问题本身就是一个非线性渗透本构问题，将上述 2 种方法的联合使用，避免变分不等式的求解，在常规非线性有限元求解框架内做最小程度的改动基础上，实现饱和–非饱和渗流的求解，着重探讨以下几个问题：(1) Bathe 方法收敛性的改善及其修正系数的三维推广；(2) 适用渗流问题的 Signorini 条件边界交换算法及其实现；(3) 提高非饱和非稳定渗流问题求解收敛性及质量守恒性的欠松弛处理方法。最后，通过典型的算例，讨论上述算法应用中的一些问题及其适用性和精度。

关键词：土力学；渗流；Signorini 条件；饱和–非饱和；有限元

中图分类号：TU 43 **文献标识码：**A **文章编号：**1000–6915(2013)11–2275–08

USING BATHE ALGORITHM AND SIGNORINI CONDITION TO SOLVE UNCONFINED SATURATED-UNSATURATED SEEPAGE PROBLEMS

LUO Guanyong，PAN Hong

(*State Key Laboratory of Subtropical Building Science*，*South China University of Technology*，*Guangzhou*，*Guangdong* 510641，*China*)

Abstract：Bathe algorithm converts the locating of the phreatic surface to a nonlinear constitutive problem. And the implication of Signorini condition can simulate a seepage face as a head-fixed boundary through iterative calculation. Because an unsaturated seepage problem is also a nonlinear flow problem，the implication of Bathe algorithm and Signorini condition makes it possible to model both saturated and unsaturated seepage problems with a unified method by a minimal modification to an ordinary finite element method，and avoiding solving a variational inequality system. The followings are discussed mainly：(1) the improvements of Bathe algorithm in converge and its generalized form in a three-dimensional model；(2) the implement of the switching algorithm of Signorini condition to solving seepage problems；and (3) the under-relaxation scheme to improve the mass conservation and converge properties when an unsteady unsaturated problem is solved. Finally，some numerical examples are solved to evaluate the applicability of the proposed method；and the results are compared with those available in the literature.

Key words：soil mechanics；seepage；Signorini condition；saturated-unsaturated；finite elements

---

收稿日期：2013–05–20；**修回日期：**2013–06–26

作者简介：骆冠勇(1979–)，男，2007 年于华南理工大学岩土专业获博士学位，现任讲师，主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail：luogy@scut.edu.cn。通讯作者：潘 泓(1967–)，男，博士，现任教授，主要从事岩土力学方面的教学与研究工作。E-mail：hpan@scut.edu.cn

1　引　言

目前，非承压渗流问题求解既可利用饱和土渗流理论也可采用非饱和土渗流理论进行求解。非饱和土渗流理论包含饱和渗流理论，两者控制方程完全相同[1-2]。不过，非饱和土渗流认为土体的渗透系数不仅取决于土体的性质，也和压力水头大小密切相关。利用非饱和土求解渗流问题无须区分饱和区和非饱和区，使得饱和和非饱和渗流的求解得到统一，此方法有广泛应用前景。但是非饱和土体渗透系数与水头压力的关系并不能轻易获取，且工程上关注重点也往往是饱和区部分的流态和压力分布，所以应用上常将渗透系数与水头压力关系简化为 Heaviside 阶跃函数，进行非承压饱和渗流的求解。这个简化处理方法在保证饱和区域求解精度的基础上牺牲了非饱和区的求解结果。Bathe 方法就是运用了这种简化[3]。

Bathe 方法是属于固定网格方法，在求解过程中有限元网格保持不变。求解非承压饱和渗流问题方法中，在属于固定网格方法还有 Desai 的残余流量动法[4]、张有天等[5]的初流量法以及著名的 Lacy 方法(或称为截止负压法)[6]等。虽然这些方法推导基础不尽相同，但最后都可归求解一个由 Heaviside 函数引起的类似于刚塑性材料非线性问题，进入经典材料非线性有限元框架中利用 Newton-Raphson (NR)方法进行求解。当然，由于 Heaviside 函数阶跃性，利用此类方法对非承压饱和渗流进行求解有时会遇到一些收敛问题。王 媛[7]对 Heaviside 函数进行了线性微调，引入单元调整参数ε_1和ε_2，改善此类方法的收敛性。

与固定网格方法对应，求解非承压饱和渗流问题另一类方法是网格(节点)调整法。该方法通过调整单元节点，使浸润面与节点位置一致，且不穿过任一单元的边，使得计算区域与饱和区一致。此方法概念清晰，是求解非承压饱和渗流问题一直在沿用的方法，但在处理非均质土体渗流时，常因为相邻土体之间渗透系数相差较大，界面的节点难以调整导致求解失败。另外，由于网格变动，当与岩土有限元应力的耦合计算也不方便。基于此，此方法目前有被固定网格取代的趋势。

无论哪种方法，都不可避免地涉及另一个问题：出溢面的确定。但建模时，出溢面的确切范围并不知道，需经计算迭代确定。此问题有许多不同的解决方法。如 A. Larabi 和 F. D. E. Smedt[8]的做法是一开始将潜在出溢边界设为定水头边界，如果计算的节点流量为正(渗入土体)，则在下一步计算中将该结节设为不透水边界，直至收敛。但实践表明，此方法的收敛性并不好，容易出现振荡现象。C. S. Desai 和 G. C. Li[4]的做法则是在潜在出溢面上附加一层强透水单元的方法进行解决，但郑 宏等[9]指出，此方法在处理多个出溢点时并不方便。H. Zheng 等[10]指出，潜在的出溢面满足 Signorini 条件，并建立全域上的变分不等式，利用非完全互补算法进行有限元求解。Signorini 条件在非承压饱和渗流问题上应用，在数学将出溢边界及不透水边界统一处理，较好解决了出溢面的确定问题。但是，郑 宏教授提出的方法最后是求解一组离散的变分不等式，求解方法相对复杂。其实，Signorini 边界条件是一种在接触问题的经常遇到边界，在常规有限元求解框架中，已有相对成熟的迭代算法，如 J. M. Aitchison 和 M. W. Poole 等[11]提出的交换算法(switching algorithm)。该算法仅通过 Dirichlet 和 Neumann 边界的交换处理，在几乎不改动常规有限元求解框架的基础上，方便地实现 Signorini 边界的处理。

本文在 Bathe 算法的基础上，提出适合渗流问题的交换算法实现 Signorini 边界条件的模拟，并以此确定渗流出溢面。Bathe 算法与 Signorini 条件的联合应用，将非承压饱和渗流问题转化为一般的非线性本构问题，利用常规的 NR 算法实现非承压渗流问题的求解，包括非稳定流和非饱和流的问题。

2　渗流问题的控制方程及其有限元离散格式

当假定分析过程中土体中总应力以及孔隙气压保持恒定，则渗流问题的控制方程[1]为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=\gamma_{\mathrm{w}}m_{\mathrm{w}}\frac{\partial h}{\partial t}\quad(1)$$

式中：h 为水头；k_x，k_y，k_z 分别为 x，y，z 向的渗透系数；γ_{w}为水的重度；m_{w}为土体体积含水量θ随孔压 u 变化曲线的斜率，$m_{\mathrm{w}}=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}u$；$t$ 为时间。

对时间采用向后差分后，式(1)基于水头的有限元离散格式(以下称为 h－型)如下式：

$$\left([T]+\frac{[C]}{\Delta t}\right)\{h\}_{t+\Delta t}=\frac{[C]}{\Delta t}\{h\}_t+\{Q\}_{t+\Delta t}\qquad(2a)$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}
&[T]=\sum_{i=1}^{n_e}\int_{V^{(i)}}[B]^{(i)\mathrm{T}}[K]^{(i)}[B]^{(i)}\mathrm{d}V^{(i)}=\\
&\quad\sum_{i=1}^{n_e}\left(\sum_{j=1}^{n_g}[B]_j^{(i)\mathrm{T}}[K]_j^{(i)}[B]_j^{(i)}\left|J_j\right|W_j\right)\\
&[C]=\sum_{i=1}^{n_e}\int_{V^{(i)}}[N]^{(i)\mathrm{T}}\lambda^{(i)}[N]^{(i)}\mathrm{d}V^{(i)}=\\
&\quad\sum_{i=1}^{n_e}\left(\sum_{j=1}^{n_g}[N]_j^{(i)\mathrm{T}}\lambda_j^{(i)}[N]_j^{(i)}\left|J_j\right|W_j\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2b}$$

式中：$[T]$，$[C]$分别为模型中所有单元集成的总的导水矩阵和释(储)水矩阵；$[K]$为材料的渗透系数矩阵；$[B]^{(i)}$为单元水头梯度插值矩阵；$[N]$为单元插值函数矩阵；$\{h\}_t$，$\{h\}_{t+\Delta t}$分别为未知节点水头在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的列矩阵；$\{Q\}_{t+\Delta t}$为节点流量在 $t+\Delta t$ 时刻的列矩阵；$|J_j|$为 Jacobi 矩阵的模；W_j为积分点权重；$\lambda=\gamma_w m_w$；n_e为模型中的总的单元数；n_g为单元的积分点个数；i，j 分别为单元和积分点计数。

当为承压水时，$[T]$，$[C]$和λ均为常量，而当为非饱和流时，则均为非常量，式(2a)变成一组非线性方程组，要进行迭代求解。对于非承压饱和渗流问题，Bathe 算法就是在式(2a)通过引入阶跃非线性渗透系数矩阵$[K]$来实现。

3　渗流问题的 Bathe 算法和 Signorini 条件

3.1　Bathe 算法

(1) 饱和流

一个典型的非承压饱和渗流问题如图 1 所示。Bathe 算法通过引入 Heaviside 阶跃函数$H(h-z)$作为相对渗透系数 k_r 对饱和渗透系数 k_s 按式(3)进行调整，将问题的求解域扩大至全域 $ABCDA$，饱和区的渗透系数取为 k_s，非饱和区的取为 0，满足非饱和区Ω_d无水干燥的假定条件：

$$k=k_r(h-z)k_s=H(h-z)k_s\tag{3a}$$

$$k_r(h-z)=H(h-z)=\begin{cases}1 & (h\geq z)\\ \varepsilon_0 & (h<z)\end{cases}\tag{3b}$$

式中：z 为位置水头；ε_0为一小量，理论上为 0，实际考虑到数值计算的稳定性，取为 0.001；h 为重力方向上的距离。

由于式(3a)和(3b)中存在 Heaviside 阶跃函数$H(h-z)$，导致有限元求解有时会出现振荡，产生收敛性问题。为改善其收敛性及数值积分的精度，王

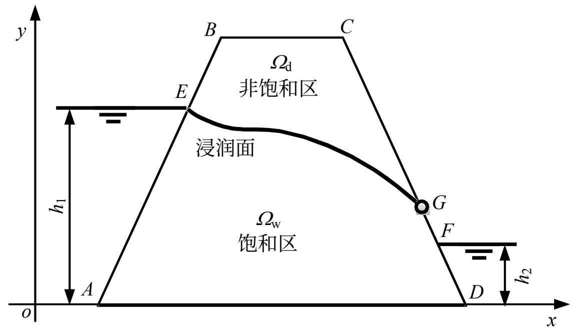


图 1　土坝渗流问题示意

Fig.1　Sketch of seepage in earth dam

媛[7]对 Heaviside 函数进行了线性微调，引入单元调整参数ε_1 和ε_2，将式(3)似刚塑性问题变成似弹理想塑性问题(见图 2)。

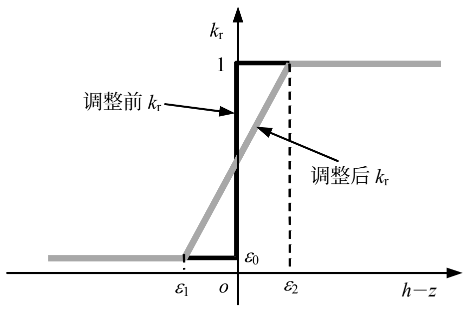


图 2　相对渗透函数与压力水头的关系

Fig.2　Relationship between relative permeability and pressure head

如果单元某积分点的压力水头小于ε_1，则该积分点对节点流量的贡献最小($k_r=\varepsilon_0$)。如果单元某积分点压力水头大于ε_2，则该积分点对节点流量贡献最大($k_r=1$)。如压力水头处两者之间，则线插。按此方法调整后，式(3b)变为

$$k_r=\begin{cases}1 & (h-z\geq\varepsilon_2)\\ \dfrac{h-z-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1} & (\varepsilon_1<h-z<\varepsilon_2)\\ \varepsilon_0 & (h-z\leq\varepsilon_1)\end{cases}\tag{4}$$

式(4)的关键在于ε_1和ε_2的取值。S. J. Lacy 和 J. H. Prevost[6]给出平面问题矩形网格的ε_1 的取值方法，取ε_1 为矩形单元中最低节点与最低积分点压力水头差的最大值。此处ε_2类比ε_1[7]，将ε_2为某一单元中通过最高节点与最高积分点压力水头差最大值。将此将方法推广至其他单元，包括三维单元，结果如图 3 所示。注意到$-\varepsilon_1$和ε_2的大小正比于 l(对于二维问题时，l 为另一方向的距离，对于三维问题时，l 为另 2 个方向距离的矢量和)，所以对于三维单元，l 取除重力方向外，另外 2 个方向的距离的矢量和。

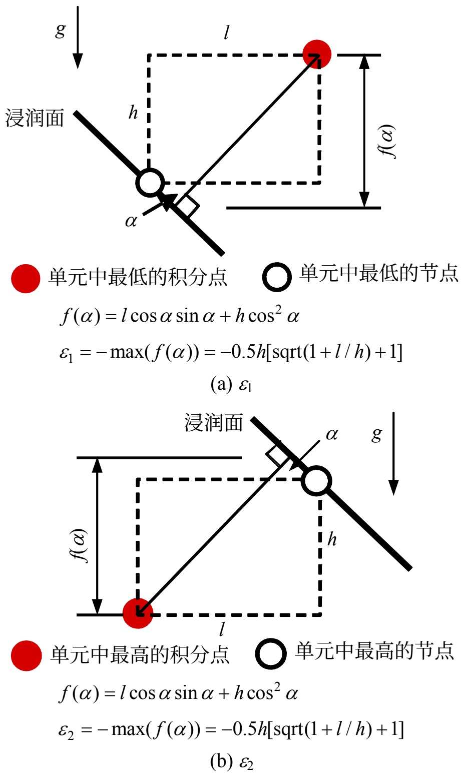


图 3　单位修正系数 ε_1 和 ε_2 的取值

Fig.3　Values of correction coefficients ε_1 and ε_2

(2) 非饱和流

非饱和流的渗透系数依赖于土中水的有效饱和度，是个高度非线性问题，常的非饱和土渗透系数模型有 van Genutchten 模型[12]、Fredlund 模型[13]以及 Gardner 指数模型[14]等。指数关系模型虽然不一定适合实际土层，但却使得式(1)易于线性化，便于求出解析解。

由于 Bathe 算法的本质是通过渗透系数非线性本构(式(3)或(4))实现的，将式(3)或(4)变成 van Genutchten 模型、Fredlund 模型或其他渗透系数非线性本构模型便可以方便地实现非饱和流的模拟。而且由于一般非饱和流本构的非线性比式(3)小，其解的收敛性往往会比式(3)或(4)好。

3.2　出溢面的 Signorini 条件及其实现

Bathe 算法有效地把内部浸润面确定问题转化成了一个材料非线性问题。此外，仍有一个问题需解决，即出溢点 G(见图 1)的位置确认，点 G 以下部分 GF 为出溢边界，点 G 以上部分 $GCBE$ 为不透水边界。

Bathe 算法中可以利用内部浸润面外插定位出溢点 G 的位置，但处理上会有一定的困难[10]，尤其在三维问题的处理上。此处利用 Signorini 条件，将出溢边界 FG 及不透水边界 $GCBE$ 进行统一处理。不难看出，在边界 $FGCBE$ 上满足下式所述的 Signorini 条件[10]：

$$\left.\begin{aligned}&h-y\leqslant 0,\quad q_{\mathrm{n}}\leqslant 0\\&(h-y)q_{\mathrm{n}}=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

3.3　Signorini 条件的交换算法

本文采用的算法基于 J. M. Aitchison 和 M. W. Poole 等[11]提出的交换算法(switching algorithm)，该算法的优点是在常规的有限元求解框架内，做最小程度的改动，便可实现 Signorini 条件的模拟。具体算法如下：

(1) 将潜在出溢面初始化为不透水边界，进入第一次迭代计算。

(2) 在迭代计算过程中，根据上一次迭代计算结果，下一次计算时潜在出溢面边界按如下算法进行确定：

① 如果潜在出溢面上某节点在上一次计算的为不透水边界，但本次计算所得压力水头大于 0(计算时设为 10^{-3})，则将其更改为定水头边界，水头值为其位置水头，否则保持不变。

② 如果潜在出溢面上某节点在上一次计算的为定水头边界，但本次计算所得流量大于 0(计算时设为 10^{-7})，则将其更改为不透水边界，否则保持不变。

从上面的算法可以看出，如果边界发生交换一次，总刚就必须重新组装和分解，当采用的修正的 NR 算法时，在一定程度上会影响其求解效率。但从后面的算例中可以看到，此算法的收敛速度较快，对整体求解效率影响不大。

4　有限元实现

4.1　NR 迭代

将式(3a)，(4)代入式(2a)并结合式(5)的边界交换算法，编制了有限元计算程序。由于问题是非线性的，采用 NR 方法其进行求解，在某一时间步 Δt 内，其迭代公式如下：

$$\left.\begin{aligned}&[A]^{k-1}\{\Delta h\}^k=\{R\}^k\\&[A]^{k-1}=[T]^{k-1}+\frac{[C]^{k-1}}{\Delta t}\\&\{R\}^k=\{Q\}_{\mathrm{b}}-\{F\}^{k-1}\\&\{F\}^{k-1}=[T]^{k-1}\{h\}^{k-1}+\frac{[C]^{k-1}}{\Delta t}[\{h\}^{k-1}-\{h\}^0]\\&\{h\}^k=\{h\}^{k-1}+s\{\Delta h\}^k\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

迭代的收敛条件为

$$\left\|\{R\}^{k}\right\| / \left\|\{F\}^{k-1}\right\| \leq TOL \tag{7}$$

当采用修正的 NR 方法求解时，仅需将$[A]^{k-1}$变为$[A]^{0}$即可。这样，在每一时间步内，在 Signorini 条件满足后，总刚$[A]^{k-1}$不需再分解，通常条件下，求解效率会比 NR 方法高。

式(6)和(7)中，k 为当前迭代步，TOL 为收敛容差，一般可取为 10^{-2}。s 为松驰因子，根据收敛情况，s 的取值范围为 $0<s\leq 1.0$。s 取小值时，可抑制解的振荡，但过小会导致收敛变慢，其实际取值范围依具体情况进行调整。

注意到式(2)是基于流量残差与边界流量的比值趋向于 0，即使 $s\rightarrow 0$ 也不会引起虚假收敛的情况。

4.2 k_r，m_w 欠松驰(Under Relax)处理

在利用式(6)进行迭代求解，更新$[T]^{k-1}$和$[C]^{k-1}$时，对 k_r 和 m_w 进行欠松驰(Under Relax)处理能有效抑制求解的振荡[15]。本文经数值试验表明，对 k_r 采用 UR2 欠松驰方案，即 k_r 取当前时间步最近相邻 2 次迭代的平均值，可明显抑制式(6)振荡，改善 NR 算法的收敛性。而对 m_w 采用 UR1 方案，即 m_w 取为当前时间步体积含水量的最近迭代值θ^{k-1} 与上一时间步的收敛值θ^{0} 之差除以相应的孔压值之差$(u^{k-1}-u^{0})$，即

$$m_{w}^{k}=\frac{\theta^{k-1}-\theta^{0}}{u^{k-1}-u^{0}} \tag{8}$$

式(8)可有效改善式(6)离散格式的质量守恒性。

5 应　用

根据上述算法，进行了 4 个算例的分析。前面 2 个的例子是饱和稳定问题。后面 2 个是则是非饱和非稳定问题。对于饱和稳定渗流问题均采用式(4)为渗流模型；而对于非饱和非稳定问题则采用非饱和模型，其中第一个采用 Gardner 指数关系模型，第二个则采用 van Genuchten 模型。算例中所采用非饱和渗流模型的计算参数如表 1 所示。

表 1　非饱和渗流模型计算参数

Table 1　Parameters for unsaturated seepage model

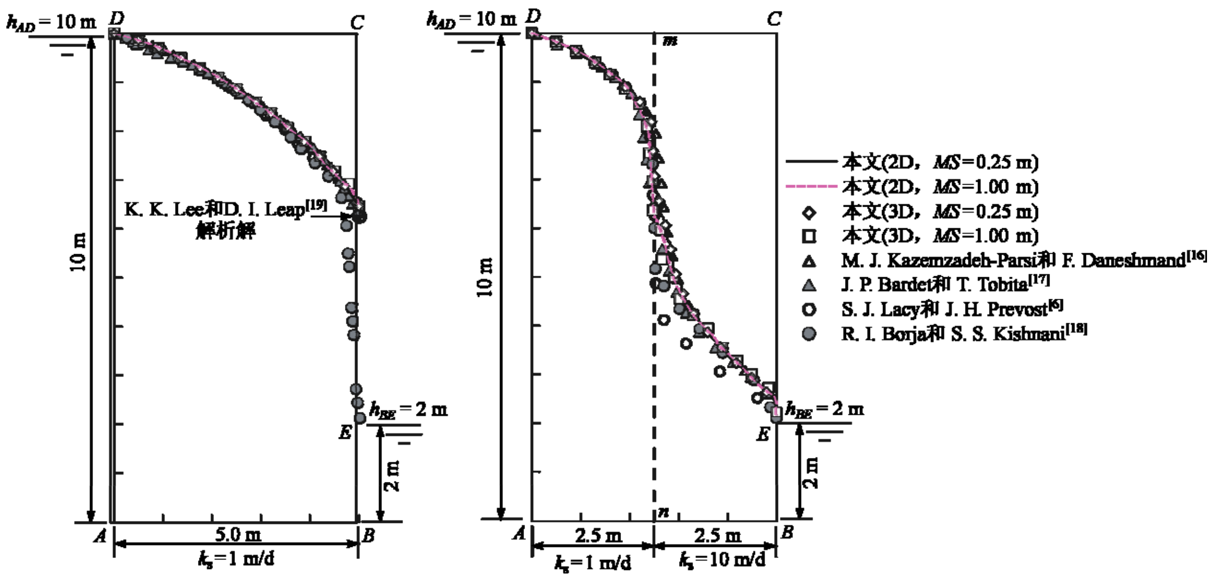
模型名称	土层	饱和状态参数		非饱和状态参数			
		k_s/(m · s^{-1})	m_w/kPa	α/m^{-1}	n	θ_s	θ_r
Gardner 模型	粉土	1.2×10^{-5}	0.5×10^{-6}	2.00	–	0.40	0.09
van Genuchten 模型	砂	1.4×10^{-3}	1.0×10^{-5}	5.02	2.36	0.35	0.05
	粉土	5.5×10^{-5}	1.0×10^{-5}	0.68	1.96	0.40	0.05

注：α，n 为模型拟合参数。

对于每个问题，均采用二维模型及三维模型进行计算，同时也与已经发表的结果或解析解进行比较。分析时，二、三维模型分别采用六节点的二次三角形单元和十节点的二次四面体单元。

5.1 饱和稳定问题

饱和稳定渗流计算的 2 个例子如图 4 所示，这 2 个例子广泛地被用于验证其他方法[6, 16-18]。第一个例子为典型的 muskat 问题。AD 和 BE 为水头边界，其水头分别为 10 和 2 m；EC 为潜在的出溢面；



(a) 均质　　　(b) 非均质

图 4　饱和稳定渗流的验证

Fig.4　Verification for saturated steady seepage problems

其他为不透水边界。第二例子与第一例子类似，只是土层不再单一，mn 右边区域的渗透系数是其左边的 10 倍，图示为修正 NR 算法所得的浸润面计算结果。可以看出：(1) 本文的计算结果与其他研究者发表的结果吻合。且第一个例子中，出溢点的位置与解析解[19]也吻合较好。(2) 二维与三维模型的结果一致，从而说明式(4)中ε_1和ε_2的取值方法(见图 3)是可行的。(3) 二维和三维模型的结果都表明计算结果对网格单元大小不敏感。说明运用式(4)可有效解决饱和流的问题。

对于流量以及修正与非修正 NR 算法的比较见表 2。由表 2 可见，对于此类问题，修正的 NR 算法比 NR 算法稳健且高效。对于例子 2，细网格二维的算例 NR 算法甚至不收敛。在流量上，所有收敛的结果均与解析解吻合较好。从表 2 中还可以看出，利用 Signorini 条件的交换算法确定出溢面的效率较高，其迭代次数相对于整体计算的次数少得多，尤其对于例子 2。在例子 2 中，由于土体不均质，大量的计算发生在确定内部浸润面上。

表 2　NR 和修正 NR 算法求解效率比较

Table 2　Efficiency comparison of NR and modified NR methods

算例编号	模型		迭代次数		求解时间/s		流量/$(m^3 \cdot d^{-1})$		
	维度	MS/m	mNR	NR	mNR	NR	mNR	NR	解析解+
1	2D	1.00	12(5)	8(4)	0.01	0.01	9.55	9.56	9.60
		0.25	16(9)	12(9)	0.04	0.06	9.59	9.59	
	3D	1.00	12(6)	8(6)	0.04	0.06	9.55	9.55	
		0.25	14(13)	12(11)	8.50	9.22	9.59	9.59	
2	2D	1.00	95(3)	505(45)	0.33	2.36	17.42	17.44	17.45
		0.25	1208(13)	不收敛	5.79	不收敛	17.45	不收敛	
	3D	1.00	117(4)	303(63)	0.53	3.16	17.50	17.50	
		0.25	1097(46)	785(168)	152.23	602.13	17.46	17.46	

注：(1) MS 代表网格尺寸；NR 代表 Newton-Raphson 算法；mNR 代表修正的 Newton-Raphson 算法。(2) 括号内的数字为 Signorini 条件交换算法确定出溢面所发生的迭代数。(3) +代表根据裘布依假定求得。根据 O. D. L. Strack 等[20]的研究成果，利用裘布依假定求得流量是精确解。

另外，如果采用阶跃性的渗透本构(式(3))，除例子 1 的二维粗网格的情况收敛外，其他情况均无法达到式(7)规定的收敛标准，无论是 NR 方案还是修正的 NR 方案，是二维模型还是三维模型，说明利用ε_1和ε_2修正后得到弹－理想塑性本构(式(4))，有效改善了收敛性。

5.2 非饱和非稳定流问题

(1) 土柱入渗问题

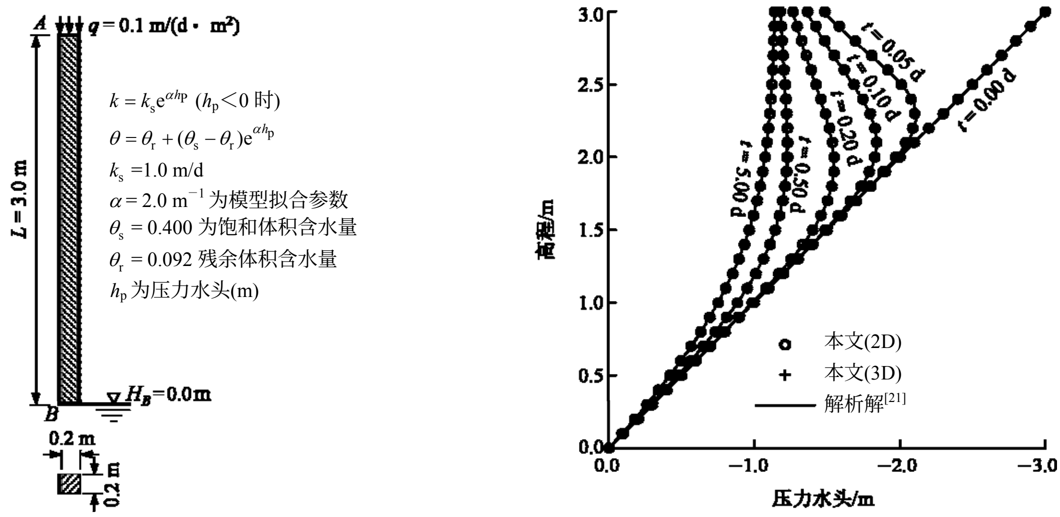
此问题是均质一维非饱和非稳定土柱入渗问题，如图 5(a)所示。渗透模型采用 Gardner 模型，其参数见表 1。其计算边界条件为：① $t \geq 0$ 时，B 为水头边界，$H_B = 0.0$ m；② $t > 0$ 时，A 为入渗边界，入渗强度 $q = 0.1$ m/(d · m^2)。而计算的初始条件为在边界条件①作用下的稳态水头。

求解时，二维和三维模型的网格大小均为 0.05 m。计算总时长为 5 d，共分 154 时间步，前 100 个时间步长为 0.005 d，紧接着的 50 个时间步长为 0.01 d，最后 4 个时间步长为 1 d。求解结果如图 5(a)所示，从中可以看出数值解与解析解[21]吻合的很好。

在质量守恒方面，定义 Q_b 为每时间步由边界进入模型的水量，$Q_b = \left(\sum\{F^{k-1}\}\right)\Delta t$ 。Q_s 为由于体积含水量的变化而存储在模型内的水量，为 $Q_s = \int(\theta - \theta_0)\mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{n_e}\sum_{j=1}^{n_g}(\theta - \theta_0)\,|J_j|\,w_j$ 。

本算例中，二维模型(三维模型类似)的累积质量比$\sum Q_s/\sum Q_b$随时间的变化如图 6 所示(图中：STS 为小时间步长，为 0.050 d/步×100 步+0.01 d/步×50 步+1 d/步×4 步，即结果为图 5 的所用的时间步长；LTS 为大时间步长，为 0.05 d/步×10 步+0.1 d/步×5 步+1 d/步×4 步；FM 为细网格，大小为 0.05 m，即图 5(b)所用网格大小；CM 为粗网格，网格大小为 0.2 m)，图中给出了不同质量矩阵更新方案、网格大小，时间步长短等 6 种情况对质量守恒率的影响。从图 6 中可以看出，UR1 方案在质量守恒方面具有良好的性质，时间步的长短、网格的大小对其影响甚小，3 种工况下的各时间步累积质量比均为 1，并没有出现 M. A. Celia 等[22]指出的 h－型的离散格式(式(2))所具有的质量不守恒的情况。其原因是，两者在求质量矩阵[C]时，m_w的计算方法不同。M. A. Celia 等[22]是采用是 UR0 方案，即 m_w的计算采用当前时间步的 h^{k-1}，利用渗流本构关系求导而得，而本文采用的是 UR1 方案。从图 6 中可以看出，采用 UR0 方案 3 种工况下累计质量比的结果比较差，尤其在开始入渗，渗透系数和含水量变化剧烈的情况下。这说明，UR0 方案不宜用在 h－型的离散格式中。

同时，此问题数值试验表明，达到如图 5(b)相同的精度条件下，NR 算法的效率要以修正的 NR 方法高很多。相同条件下，NR 算法求解整个过程，二维、三维模型所需的时间分别为 1.31 和 31.9 s，而修正的 NR 方法对应的时间分别为 36.0 和 322.2 s。mNR 算法比 NR 算法慢很多，原因可能是质量矩阵的影响，因为在前述稳态饱和问题中，mNR 算法



(a) 计算几何模型　　　　　　(b) 不同时刻下的压力水头分布

图 5　非饱和土柱入渗问题

Fig.5　Unsaturated soil column infiltration problem

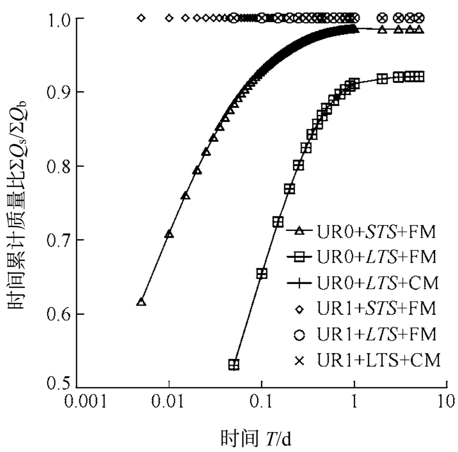


图 6　不同松驰方案质量守恒情况

Fig.6　Mass balance under different under-relaxation schemes

的效率比 NR 算法要高。

另外，如果 k_r 不采用欠松驰 UR2 方案，而采用 UR0 方案，即采用当前迭代步 $\{h\}^{k-1}$ 的水头求 k_r，NR 算法不收敛，修正的 NR 的收敛性也变差。

(2) 多层边坡入渗问题

第 2 个非饱和非稳定问题为一水平 3 层土边坡非稳定入渗问题，中间土层为粉土，顶层和低层为砂土，其计算模型和边界如图 7 所示。渗透模型采用 van Genchten 模型，其参数见表 1。计算边界条件为：① $t \geq 0$ 时，AFE 为水头边界，$HAFE = 0.3$ m，ED 为出溢面；CBA 为不透水边界。② $t > 0$ 时，DC 为入渗边界，入渗强度 $q = 2.1 \times 10^{-4}\ \mathrm{m/(s \cdot m^2)}$。而计算的初始条件是在边界条件①作用下的稳态水头。

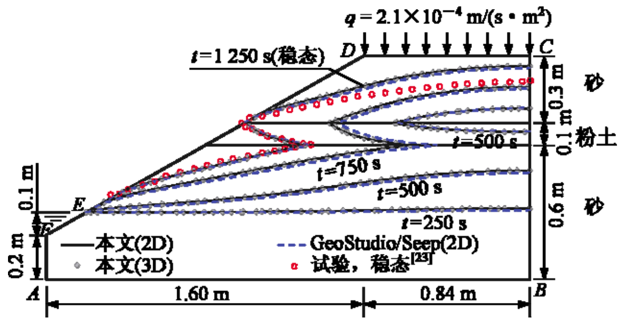


图 7　多个出溢面多层边坡入渗问题

Fig.7　Seepage within a layered hill slope

此问题的特点是形成多个出溢面，J. J. Rulon 等[23]利用砂槽试验研究过此问题。模拟此问题的二维和三维模型的单元尺寸均为 0.05 m，时间步长取为 25 s。图 7 中显示浸润面随时间的变化。从图 7 中可以看出，本文的计算结果与商用软件 GeoStudio 的计算结果相当一致，与试验也基本吻合。说明本文的方法可方便处理多个出溢面的问题。

在质量守恒方面以及求解效率方面的结果均与第 3 个问题类似，求解质量矩阵[C]的欠松驰 UR1 方案远比 UR0 方案好，非稳定渗流计算中 NR 算法比修正的 NR 算法效率高很多，此处不再赘述。

6　结　论

Bathe 算法与 Signorini 条件的联合应用，将饱和–非饱和渗流问题统一转化为一般的非线性本构问题，避免变分不等式的求解，在常规材料非线性

有限元框架范围内，利用常规的 NR 算法实现非承压渗流问题的求解，包括非稳定流和非饱和流的问题，得到以下几点结论：

Signorini 条件边界交换算法可有效实现出溢面的模拟，包括多个出溢面的情况。

对于非承压饱和流，相对与原来似刚塑(阶跃)性渗透系数本构(式(3))，利用ε_1和ε_2修正后得到似弹-理想塑性本构(式(4))，无论二维还是三维模型，均可有效改善其收敛性。

对于非承压饱和流弹－理想塑性本构(式(4))，利用修正的 NR 方案更稳健，效率更高。而对于非饱和非稳定流，则 NR 求解方案效率更高。

对于非饱和非稳定流的 h－型有限元离散格式(式(2a))，利用 UR1 欠松驰方案更新质量矩阵，可保证求解结果质量守恒性，而 UR0 方案下求解的质量守恒性很差。

对于相对渗透系数 k_r，采用 UR2 欠松驰方案，即 k_r 取当前时间步最近相邻 2 次迭代的平均值，可明显抑制求解振荡，改善 NR 算法的收敛性。

参考文献(References)：

[1] LAM L，FREDLUND D G，BARBOUR S L. Transient seepage model for saturated-unsaturated soil systems：a geotechnical engineering approach[J]. Canadian Geotechnical Journal，1987，24(4)：565－580.

[2] HUYAKORN P S，THOMAS S D，THOMPSON B M. Techniques for making finite elements competitive in modeling flow in variably saturated porous media[J]. Water Resources Research，1984，20(8)：1 099－1 115.

[3] BATHE K J，KHOSHGOFTAAR M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics，1979，3(1)：13－22.

[4] DESAI C S，LI G C. A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media[J]. Advances in Water Resources，1983，6(1)：27－35.

[5] 张有天，陈　平，王　镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报，1988，19(8)：18－26.(ZHANG Youtian，CHEN Ping，WANG Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering，1988，19(8)：18－26.(in Chinese))

[6] LACY S J，PREVOST J H. Flow through porous media：a procedure for locating the free surface[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics，1987，11(6)：585－601.

[7] 王　媛. 求解有自由面渗流问题的初流量法的改进[J]. 水利学报，1998，29(3)：69－74.(WANG Yuan. The modified initial flow method for 3D unconfined seepage computation[J]. Journal of Hydraulic Engineering，1998，29(3)：68－74.(in Chinese))

[8] LARABI A，SMEDT F D E. Numerical solution of 3D groundwater flow involving free boundaries by a fixed finite element method[J]. Journal of Hydrology，1997，201(1/4)：161－182.

[9] 郑　宏，戴会超，刘德富. 改进的有自由面渗流问题的 Bathe 算法. 岩土力学，2005，26(4)：505－512.(ZHENG Hong，DAI Huichao，LIU Defu. Improved Bathe′s algorithm for seepage problems with free surfaces[J]. Rock and Soil Mechanics，2005，26(4)：505－512.(in Chinese))

[10] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, et al. A new formulation of Signorini′s type for seepage problems with free surfaces[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2005，64(1)：1－16.

[11] AITCHISON J M，POOLE M W. A Numerical Algorithm for the solution of signorini problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，1998，94(1)：55－67.

[12] GENUCHTEN M T V. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Science Society of America Journal，1980，44(5)：891－898.

[13] FREDLUND D G，ANQING X，SHANGYAN H. Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil-water characteristic curve[J]. Canadian Geotechnical Journal，1994，31(4)：533－546.

[14] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. Soil Science，1958，85(4)：228－232.

[15] PHOON K K，TAN T S，CHONG P C. Numerical simulation of richards equation in partially saturated porous media：under-relaxation and mass balance[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2007, 25(5)：525－541.

[16] KAZEMZADEH-PARSI M J，DANESHMAND F. Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics，2011，36(6)：780－797.

[17] BARDET J P，TOBITA T. A practical method for solving free-surface seepage problems[J]. Computers and Geotechnics，2002，29(6)：451－475.

[18] BORJA R I, KISHNANI S S. On the solution of elliptic free-boundary problems Via Newton′s method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，1991，88(3)：341－361.

[19] LEE K K，LEAP D I. Simulation of a free-surface and seepage face using Boundary-fitted coordinate system method[J]. Journal of Hydrology, 1997，196(1/4)：297－309.

[20] STRACK O D L，BARNES R J，VERRUIJT A. Vertically integrated flows, discharge potential, and the dupuit-forchheimer approximation[J]. Ground Water，2006，44(1)：72－75.

[21] SRIVASTAVA R，YEH T C J. Analytical solutions for one-dimensional，transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils[J]. Water Resources Research，1991，27(5)：753－762.

[22] CELIA M A，BOULOUTAS E T，ZARBA R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation[J]. Water Resources Research，1990，26(7)：1 483－1 496.

[23] RULON J J, RODWAY R, FREEZE R A. The development of multiple seepage faces on layered slopes[J]. Water Resources Research，1985，21(11)：1 625－1 636.