

第六章 固体力学和结构力学的有限元非线性分析

6.1 非线性分析引言

在4.2节所叙述的有限元表述中，我们假设有限元集合的位移为无穷小并假设材料是线弹性的。另外，我们还假设当荷载作用在有限元集合上时边界条件的性质保持不变。在这些假设条件下，对静力分析导出的有限元平衡方程为

$$KU = R \quad (6.1)$$

由于位移响应 U 是作用荷载向量 R 的线性函数，所以这些方程对应于结构问题的线性分析，即如果用荷载 αR 代替 R （其中 α 是常数），则对应的位移为 αU 。当与上述情况不同时，则我们进行的是非线性分析。

响应预测的线性性质依赖于上述假设，应当详细地阐明这些假设在何处参与了平衡方程(6.1)。事实上，在计算矩阵 K 和荷载向量 R 时已认为位移必须很小。因为所有的积分都是在有限元的原始体积上求出的，而且假设每个单元的应变一位移矩阵 B 是常数，且与单元位移无关。使用常应力—应变矩阵 C 隐含着假设材料是线弹性的。而在最后，假设边界条件保持不变是对整个响应使用了常约束关系（见(4.39)至(4.45)）的一种反映。如果在加载中位移边界条件有变化，例如一个自由度在某一荷载水平下，从自由的变为受约束的，则响应仅在边界条件发生变化前才是线性的。例如，在接触问题的分析中就会出现这种情况（见例6.2）。

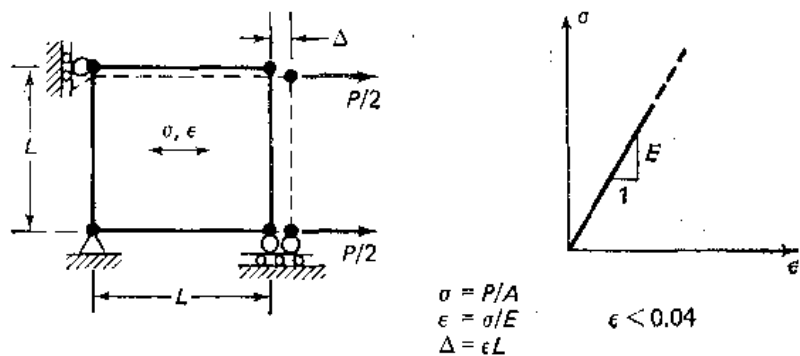
表6.1 非线性分析的分类

分析类型	描 述	所用的典型表述	应力和应变度量
仅为材料非线性	无穷小位移和应变，应力—应变关系是非线性的	仅材料非线性 (M.N.O)	工程应力和应变
大位移，大转角， 但小应变	纤维的位移和转角大，但纤维间的纤维延伸及角变化小；应力—应变关系可以是线性或非线性的	全量拉格朗日表述(T.L.) 修正的拉格朗日表述(U.L.)	第二Piola-Kirchhoff应力， Green-Lagrange应变 Cauchy应力， Almansi应变
大位移，大转角及 大应变	纤维间的纤维延伸及角变化大，纤维位移及转角也可以是大的；应力—应变关系可以是线性或非线性的	修正的拉格朗日Jaumann表述 (U.L.J) 全量拉格朗日表述(T.L.)	Jaumann应力率， 速度应变 第二Piola-Kirchhoff应力， Green-Lagrange应变

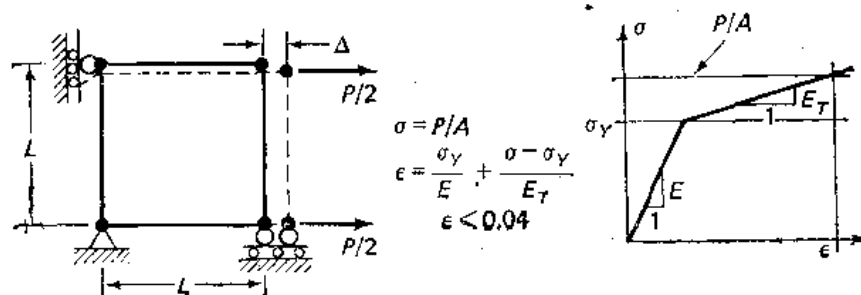
上面关于线性分析中所用基本假设的讨论解释了非线性分析的意义，并且还提出了如何对不同的非线性分析进行分类的方法。表6.1给出在实际非线性分析中应用非常方便的一种

分类。因为这种分类分别考虑材料非线性和运动非线性的影响。如果要分析一个实际问题，为了列出公式和计算，事实上它是按表6.1所给类型之一的问题进行描述和分析的。我们将要详细讨论表中所列的表述，但我们注意到其它表述也一样可用来求解问题。

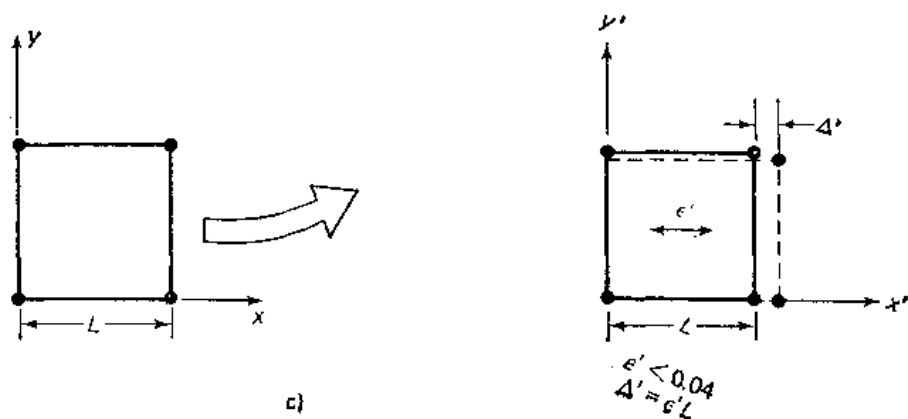
图6.1给出了表6.1中列出的那些问题类型的说明。我们应注意在仅考虑材料非线性的分析中，非线性效应存在于非线性应力—应变关系之中。位移和应变均为无穷小；因此，在响应描述中可以采用通常的工程应力及应变度量。在考虑大位移但小应变的条件下，我们注意到材料实际上只承受在附体坐标系 $x'-y'$ 内度量的无穷小应变，虽然该坐标系都经历大的刚体位移和转角。材料的应力—应变关系可以是线性的或非线性的。



a)



b)



c)

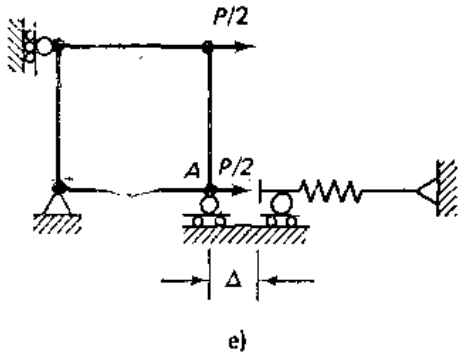
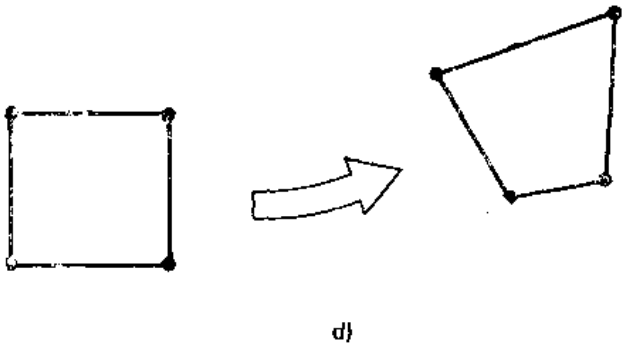


图6.1 非线性分析的分类

a)线弹性 (无穷小位移) b)仅材料非线性 (无穷小位移, 但应力—应变关系是非线性的) c)大位移和大转角但小应变 线性或非线性的材料特性 d)大位移、大转角和大应变 线性或非线性材料特性 e)在位移 Δ 处边界条件的变化

如图6.1和表6.1所示, 最通用的分析是材料承受大位移和大应变的情况。在这种情况下, 应力—应变关系通常也是非线性的。

除了表6.1所列出的分析类型以外, 图6.1还说明了另一种非线性分析的类型, 即考虑物体在运动时边界条件有变化的这类问题的分析。这种情况出现在接触问题的分析中, 图6.1(e)给出了其中的一个简单的例子。一般说来, 这种边界条件的变化可能会在表6.1所归纳的任一种分析中遇到。

在实际分析中, 有必要确定问题是属于哪一种分析类型的, 将采用哪一种表述来描述其实际的物理状况。反之, 我们可以说, 使用一种具体的表述, 即对实际的物理状况假设一个模型, 而表述的选择是整个模型建立过程的一部分。当然, 使用最通用的大应变表述“总是正确的”; 但使用限制较多的表述可使计算更为有效, 还可以对响应预测提供更深入的了解。

在讨论非线性分析的通用表述之前, 先考虑两个简单的例子是有益的。这两个例子说明了表6.1列出的一些特征。

例6.1 一个两端固支的杆受轴向荷载作用, 如图6.2a)所示。应力—应变关系和荷载随时间变化的关系曲线分别在图6.2b)和c)中给出。假设位移和应变很小, 并且缓慢加载,

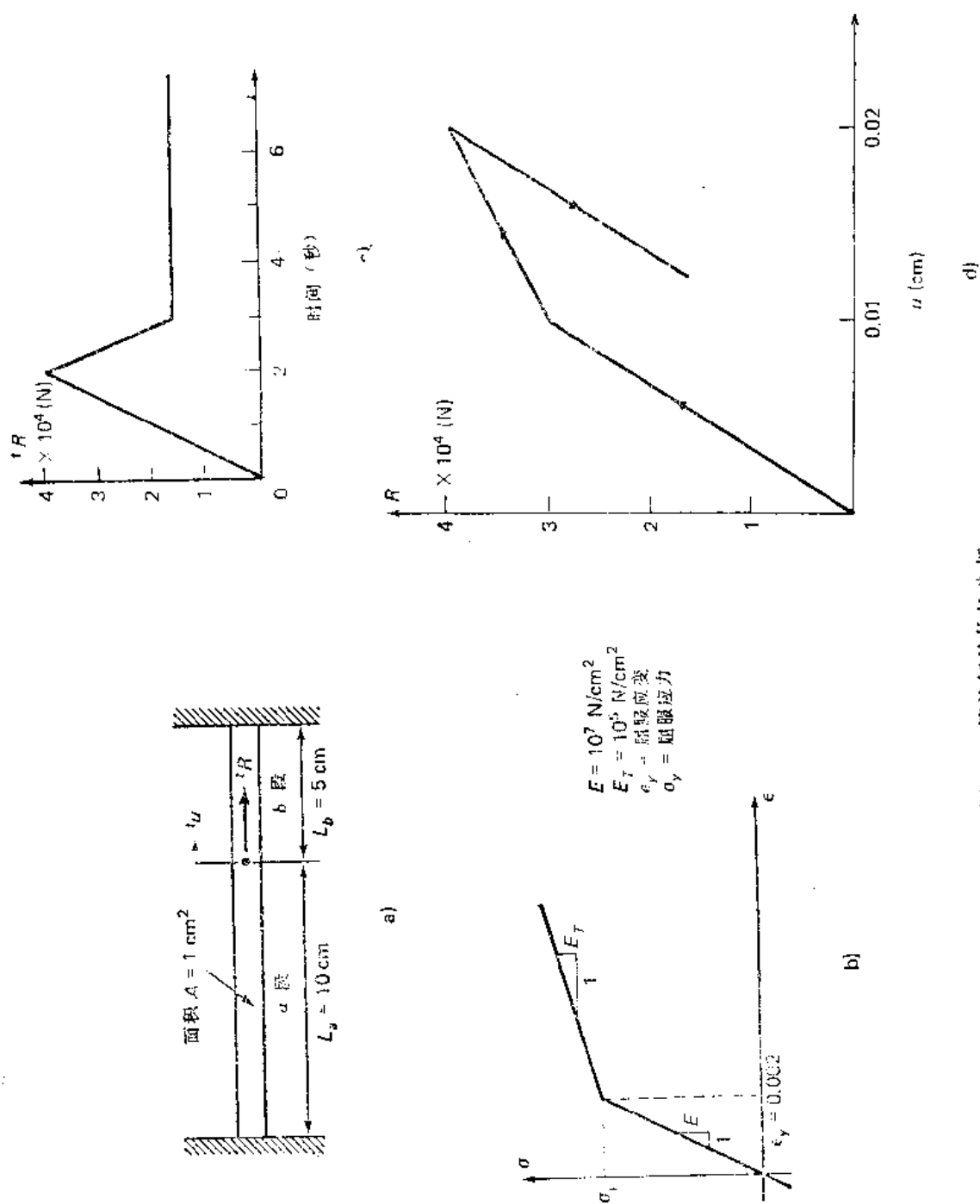


图6.2 简单杆结构的分析
 a) 简单杆结构 b) 应力—应变关系 (受拉和受压) c) 荷载变化 d) 计算的结果

试计算荷载作用点处的位移。

由于缓慢加载且位移和应变很小, 我们利用仅考虑材料非线性的静力分析来计算杆的响应。于是对于a段和b段, 我们得到应变关系,

$$\epsilon_a = \frac{u}{L_a}; \quad \epsilon_b = -\frac{u}{L_b} \quad (a)$$

平衡关系

$$R + \sigma_b A = \sigma_a A \quad (b)$$

荷载条件下的本构关系

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sigma/E && \text{在弹性区域中} \\ \epsilon &= \epsilon_y + (\sigma - \sigma_y)/E_I && \text{在塑性区域中} \end{aligned} \quad (c)$$

及在卸载时

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta \sigma}{E}$$

在这些关系中, 上标“ i ”表示“在时间 i ”。

(i) a段和b段都是弹性的

在加载的最初阶段, a段和b段都是弹性的。因此, 利用式(a)到式(c), 得

$$R = EA u \left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right)$$

把图6.2给出的值代入上式, 得到

$$u = \frac{R}{3 \times 10^8}$$

其中

$$\sigma_a = \frac{R}{3A}, \quad \sigma_b = -\frac{2}{3} \frac{R}{A} \quad (d)$$

(ii) a段是弹性的而b段是塑性的

当b段将在时间 t^* 成为塑性时, 利用式(d)

$$R^* = \frac{3}{2} \sigma_y A$$

所以, 此后我们得到

$$\sigma_a = E \frac{u}{L_a} \quad (e)$$

$$\sigma_b = E_I \left(\frac{u}{L_b} - \epsilon_y \right) + \sigma_y$$

因此, 利用式(e), 对于 $t \geq t^*$, 得

$$R = \frac{EA}{L_a} u + \frac{E_I A}{L_b} u - E_I \epsilon_y A + \sigma_y A$$

于是

$$u = \frac{R/A + E_I \epsilon_y - \sigma_y}{\frac{E}{L_a} + \frac{E_I}{L_b}}$$

$$= \left(\frac{{}^tR}{1.02 \times 10^5} - 1.9412 \times 10^{-2} \right)$$

我们可能会注意到当 ${}^t\sigma_s = \sigma_s$ 或 ${}^tR = 4.02 \times 10^4 \text{ N}$ 时, a 段会成为塑性的, 但既然荷载并未达到该值 (见图 6.2(c)), a 段将在整个响应历程中保持弹性。

(iii) 在卸载时两段都为弹性的

得

$$\Delta u = \frac{\Delta R}{EA \left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right)}$$

计算出的响应示于图 6.2d) 中。

例 6.2 一个预加张力的电缆在两个支点中间受到横向荷载的作用, 如图 6.3(a) 所示。在荷载下方距离为 w_{gap} 处放置一弹簧。假设位移很小以致电缆中的力保持为常数, 并缓慢加载。计算在荷载作用下作为荷载强度函数的位移。

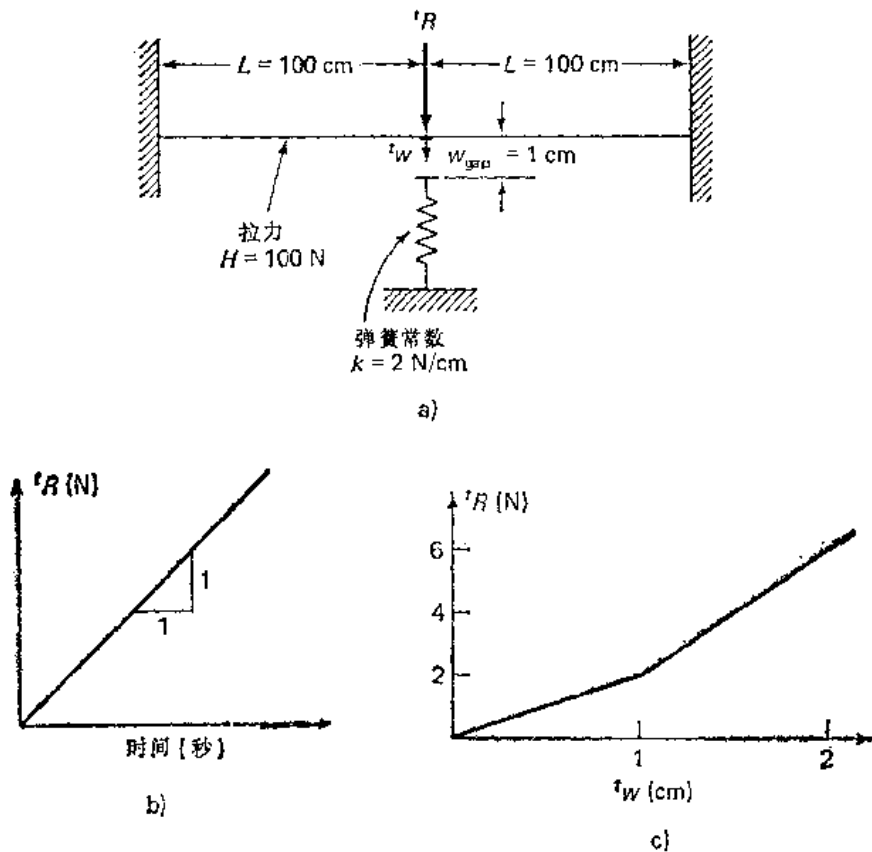


图 6.3 弹簧支承的预加张力电缆的分析
a) 承受横向荷载的预张力电缆 b) 荷载 c) 计算的响应

如例 6.1 一样, 我们忽略惯性力并假设为小位移。只要荷载作用下的位移 tw 比 w_{gap} 小, 则对于小的 tw , 垂直平衡要求

$${}^tR = 2H \frac{{}^tw}{L} \quad (a)$$

如果位移比 w_{gap} 大, 则下列平衡方程成立

$${}^tR = 2H \frac{{}^tw}{L} + k({}^tw - w_{gap}) \quad (b)$$

图6.3(c)中曲线所示为式(a)和式(b)给出的力一位移关系

应当指出, 在分析中我们忽略了电缆的弹性; 因此仅用(a)和(b)式中的平衡方程计算响应, 而唯一的非线性来源于当 ${}^tw \geq w_{gap}$ 时所建立的接触条件。

虽然上面的例子代表了两个非常简单的问题的解, 所用的分析方法却展示了一些重要的普遍特性。一般来说, 非线性分析的基本问题是找出物体对应于所加荷载下的平衡状态。假设外加荷载为时间的函数, 如在例6.1和6.2中所考虑的那样, 则物体的有限元系统的平衡条件可表示为

$${}^tR - {}^tF = 0 \quad (6.2)$$

其中向量 tR 表示在时间 t 位形中外加结点力, 向量 tF 表示对应于这个位形的单元应力的结点力。因此, 用第四章的符号和关系式(4.14)至式(4.20), 得到

$${}^tR = {}^tR_B + {}^tR_S + {}^tR_C \quad (6.3)$$

$$\text{且得到 } R_I = {}^tF, \quad {}^tF = \sum_m \int_{V(m)} {}^tB^{(m)T} {}^t\tau^{(m)} dV^{(m)} \quad (6.4)$$

在一般的大变形分析中, 物体在时间 t 的应力和体积都是未知的。

关系式(6.2)应该表示系统在当前的变形几何图形中计及全部非线性因素后的平衡。同样, 在动态分析中, 如4.2.1节所讨论的那样, 向量 tR 应包括惯性力和阻尼力。

考虑非线性响应的解时我们应注意到, 在整个加载过程中(即时间变量 t 可以从0到感兴趣的极大时间中取任何值)必须满足平衡关系式(6.2)(见例6.1和6.2)。在除加载等级的定义外无其它时间效应的静态分析中(例如, 没有蠕变效应, 见6.4.2节), 时间仅是便于表示荷载作用的不同强度及其相应位形的一个度量。但在动态分析和有材料时间效应的静态分析中, 时间变量是严格地包括在建立真实物理状况模型之中的一个实际变量。基于这些考虑, 我们可能已经了解, 使用时间变量来描述荷载作用和解的历程, 是一个非常普遍的方法, 并且它符合我们早先的推断, 即“动态分析基础上是包括惯性效应的静态分析”。

至于要计算的分析结果, 在许多分析中仅要求在特定加载等级或特定时间下达到的应力和位移。在一些非线性静态分析中可以算出对应于那些加载等级的平衡位形而无需求解其它的平衡位形。然而, 当分析含有与途径有关的非线性的几何或材料条件, 或随时间变化的现象时, 则必须在全部感兴趣的时间范围内解出平衡关系式(6.2)。这个响应计算可有效地用逐步增量分析作出。如果在与时间无关的静态解中, 总荷载是同时作用的, 并仅需计算对应于该荷载的位形, 这个分析就简化为一步分析。然而我们将看到, 在实际上为了计算上的原因, 甚至这种分析情况也常常需要增量解, 经过很多荷载步长最终达到总的作用荷载。

逐步增量解的基本方法是假设已知对于离散时间 t 的解, 而需要求离散时间 $t + \Delta t$ 的解, 其中 Δt 是适当选择的时间增量。因此, 考虑在时间 $t + \Delta t$ 的式(6.2), 我们得到

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \quad (6.5)$$

其中左上标代表“在时间 $t + \Delta t$ ”。既然已知时间 t 的解, 可写出

$${}^{t+\Delta t}F = {}^tF + F \quad (6.6)$$

其中 F 是与单元位移和应力从时间 t 到时间 $t + \Delta t$ 的增量对应的结点力增量。这个向量可用正切刚度矩阵 tK 近似得到, tK 符合于时间 t 的几何和材料条件

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (6.7)$$

其中 $\mathbf{U}$ 是增量结点位移的向量。把式(6.7)和式(6.6)代入式(6.5), 可得

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{F}^t \quad (6.8)$$

为了解出 $\mathbf{U}$, 我们可计算时间 $t + \Delta t$ 的位移的近似值

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} \approx \mathbf{U}^t + \mathbf{U} \quad (6.9)$$

时间 $t + \Delta t$ 的正确位移是对应于作用荷载 $\mathbf{F}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ 的那些位移。因为用了式(6.7), 在式(6.9)中我们仅计算这些位移的近似值。

算出了对应于时间 $t + \Delta t$ 的位移的近似值, 现在我们就可以求解时间 $t + \Delta t$ 的应力及相应结点力的近似值, 然后进行下一个时间增量的计算。然而由于式(6.7)中的假设, 这样的解可能误差很大, 且取决于所用时间或荷载步长的大小, 甚至可能是不稳定的。因此实际上经常需要迭代, 直至得到式(6.5)的足够精确的解为止。

广泛使用的迭代方法是修正的牛顿迭代法。这一迭代法可以从求解非线性方程组的 Newton-Raphson 方法导出, 我们将在 8.6 节中详细讨论, 但它也可作为上述简单增量分析的一种推广。在下面关于非线性分析的有限元表述的讨论中, 我们将始终按修正的牛顿法列出解的方程, 因为这个方法在许多分析中十分有效, 并包含了几乎全部增量解对策中使用的基元求解步骤。8.6 节是讨论其它各种方法以及应用各种方法时的一些实际要领。

在修正的牛顿迭代法中使用的方法是, 对 $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{F}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (6.11)$$

初始条件为

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{F} \quad (6.12)$$

这些方法在 8.6 节中用形式数学方法导出。然而在这里搞清楚物理过程是有益的, 平衡迭代实质上以此为基础。在第一次迭代时, 关系式(6.10)和式(6.11)简化为前面已讨论过的方程式(6.8)和式(6.9)。在后续的迭代中, 结点位移的最新估计值被用来计算相应的单元应力和结点力 $\mathbf{F}^{(i-1)}$ 。此外, 不平衡荷载向量 $\mathbf{F}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{F}^{(i-1)}$ 对应于尚未被单元应力所平衡的荷载向量, 这就要求结点位移有增量。这种结点位移的修正在迭代中一直进行到不平衡荷载和增量位移很小为止。

在实际使用式(6.10)至式(6.12)给出的迭代过程中, 迭代的收敛性非常重要, 并需要采用适当的收敛准则(见 8.6 节)。现在我们来说明上述方程在一些示例中的应用。

例 6.3 把图 6.4(a)所示的简单拱结构理想化为两个杆单元的集合。假设一杆单元中的力为 $P_{bar} = k\delta$, 其中 k 是常数, δ 是杆在时间 t 的伸长。(假设 k 为常数很可能仅对杆的小变形才是有效的, 但为了简化分析, 我们仍采用这个假设。)对这个问题建立平衡关系式(6.5)。

这是一个大位移问题, 把注意力集中在对应于典型时间 t 的位形的杆集合的平衡上计算其响应。利用图 6.4(b)和(c)所示的对称性, 我们得到

$$(L - e)\cos\beta = L\cos 15^\circ$$

$$(L - e)\sin\beta = L\sin 15^\circ - \Delta$$

因此

$$e = L - \sqrt{L^2 - 2L\Delta\sin 15^\circ + \Delta^2}$$

$$\sin\beta = \frac{L\sin 15^\circ - \Delta}{L - e}$$

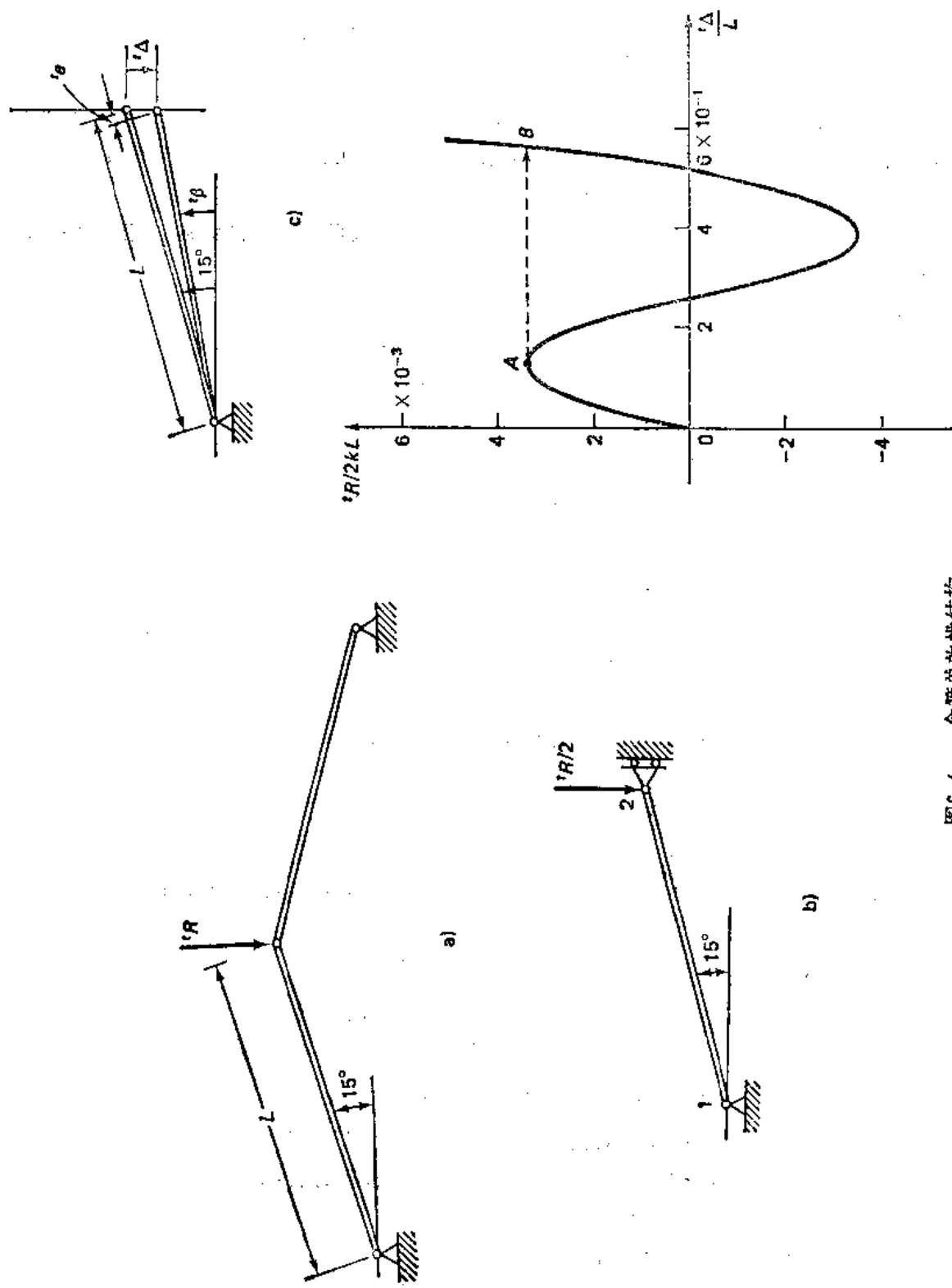


图 6.4 一个简单的拱结构
 a) 承受顶点荷载的杆集合 b) 用一根杆 (桁架) 单元的简单模型, 结点1和2 c) 典型位形中几何尺寸的变化 d) 荷载—位移关系

在时间 t 的平衡要求为

$$2^t F_{bar} \sin^t \beta = {}^t R$$

因此关系式(6.5)为

$$\frac{{}^t R}{2kL} = \left\{ -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{{}^t \Delta}{L} \sin 15^\circ + \left(\frac{{}^t \Delta}{L}\right)^2}} \right\} \left(\sin 15^\circ - \frac{{}^t \Delta}{L} \right) \quad (a)$$

图6.4(d)表示了为式(a)建立的力—位移关系。应当指出,对于给定的加载等级,在点A和B之间我们有两个可能的位移位形。如果结构受单调增加荷载 ${}^t R$ 的作用,在图6.4(d)中位移从A跳跃到B的途径很可能是实际的物理状态。

例6.4 用关系式(6.10)至式(6.12)计算例6.1所考虑的杆集合的响应。用两个相等的荷载步长来达到最大荷载。

在此分析中迭代方程是

$$\begin{aligned} ({}^t K_a + {}^t K_b) \Delta u^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F_a^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} F_b^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} u^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \end{aligned} \quad (a)$$

和

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} u^{(0)} &= {}^t u \\ {}^{t+\Delta t} F_a^{(0)} &= {}^t F_a, \quad {}^{t+\Delta t} F_b^{(0)} = {}^t F_b \\ {}^t K_a &= {}^t CA/L_a, \quad {}^t K_b = {}^t CA/L_b \end{aligned} \quad (b)$$

其中

$${}^t C \begin{cases} = E \text{ (如果是弹性段)} \\ = E_T \text{ (如果是塑性段)} \end{cases}$$

对于弹性段

$${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} = EA {}^{t+\Delta t} \epsilon^{(i-1)} \quad (c)$$

对于塑性段

$${}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} = A \{ E_T ({}^{t+\Delta t} \epsilon^{(i-1)} - \epsilon_y) + \sigma_y \} \quad (d)$$

二段中的应变是

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \epsilon_a^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} / L_a \\ {}^{t+\Delta t} \epsilon_b^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)} / L_b \end{aligned} \quad (e)$$

在第一个加载步长中,我们有 $t=0$, $\Delta t=1$, 这样,利用关系式(a)到式(e)给出 $t=1$

$$\begin{aligned} ({}^0 K_a + {}^0 K_b) \Delta u^{(1)} &= {}^1 R - {}^1 F_a^{(0)} - {}^1 F_b^{(0)} \\ \Delta u^{(1)} &= \frac{2 \times 10^4}{10^7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right)} 6.6667 \times 10^{-3} \text{ cm} \\ {}^{(1-1)} u^{(1)} &= {}^1 u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 6.6667 \times 10^{-3} \text{ cm} \\ {}^1 \epsilon_a^{(1)} &= {}^1 u^{(1)} / L_a = 6.6667 \times 10^{-4} < \epsilon_y \rightarrow a \text{ 段是弹性的} \\ {}^1 \epsilon_b^{(1)} &= {}^1 u^{(1)} / L_b = 1.3333 \times 10^{-3} < \epsilon_y \rightarrow b \text{ 段是弹性的} \\ {}^1 F_a^{(1)} &= 6.6667 \times 10^3 \text{ N} \\ {}^1 F_b^{(1)} &= 1.3333 \times 10^4 \text{ N} \\ ({}^0 K_a + {}^0 K_b) \Delta u^{(2)} &= {}^1 R - {}^1 F_a^{(1)} - {}^1 F_b^{(1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

故一次迭代已经收敛

$$^1u = 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

$i = 2$

$$^1K_a = \frac{EA}{L_a}, \quad ^1K_b = \frac{EA}{L_b}$$

$$^2F_a^{(0)} = ^1F_a, \quad ^2F_b^{(0)} = ^1F_b$$

$$(^1K_a + ^1K_b)\Delta u^{(1)} = ^2R - ^2F_a^{(0)} - ^2F_b^{(0)}$$

$$\Delta u^{(1)} = \frac{(4 \times 10^4) - (6.6667 \times 10^3) - (1.3333 \times 10^4)}{10^7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right)}$$

$$= 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

$(i = 1)$

$$^2u^{(1)} = ^2u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 1.3333 \times 10^{-2} \text{cm}$$

$$^2\epsilon_a^{(1)} = 1.3333 \times 10^{-3} < \epsilon_y \rightarrow a \text{段是弹性的}$$

$$^2\epsilon_b^{(1)} = 2.6667 \times 10^{-3} > \epsilon_y \rightarrow b \text{段是塑性的}$$

$$^2F_a^{(1)} = 1.3333 \times 10^4 \text{N}$$

$$^2F_b^{(1)} = \{ E_T(^2\epsilon_b^{(1)} - \epsilon_y) + \sigma_y \} A = 2.0067 \times 10^4 \text{N}$$

$$(^1K_a + ^1K_b)\Delta u^{(2)} = ^2R - ^2F_a^{(1)} - ^2F_b^{(1)}$$

$$\Delta u^{(2)} = 2.2 \times 10^{-3} \text{cm}$$

$$(i = 2) \quad ^2u^{(2)} = ^2u^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1.5533 \times 10^{-2} \text{cm}$$

$$^2\epsilon_a^{(2)} = 1.5533 \times 10^{-3} < \epsilon_y$$

$$^2\epsilon_b^{(2)} = 3.1066 \times 10^{-3} > \epsilon_y$$

$$\therefore ^2F_a^{(2)} = 1.5533 \times 10^4 \text{N}$$

$$^2F_b^{(2)} = 2.0111 \times 10^4 \text{N}$$

$$(^1K_a + ^1K_b)\Delta u^{(3)} = ^2R - ^2F_a^{(2)} - ^2F_b^{(2)}$$

$$\Delta u^{(3)} = 1.4521 \times 10^{-3} \text{cm}$$

重复进行此过程，逐次迭代的结果在下表中列出。

i	$\Delta u^{(i)} (\text{cm})$	$^2u^{(i)} (\text{cm})$
3	1.4521×10^{-3}	1.6985×10^{-2}
4	9.5832×10^{-4}	1.7944×10^{-2}
5	6.3249×10^{-4}	1.8576×10^{-2}
6	4.1744×10^{-4}	1.8994×10^{-2}
7	2.7551×10^{-4}	1.9269×10^{-2}

七次迭代后，我们得到

$$^2u = ^2u^{(7)} = 1.9269 \times 10^{-2} \text{cm}$$

6.2 连续介质力学增量运动方程的表述

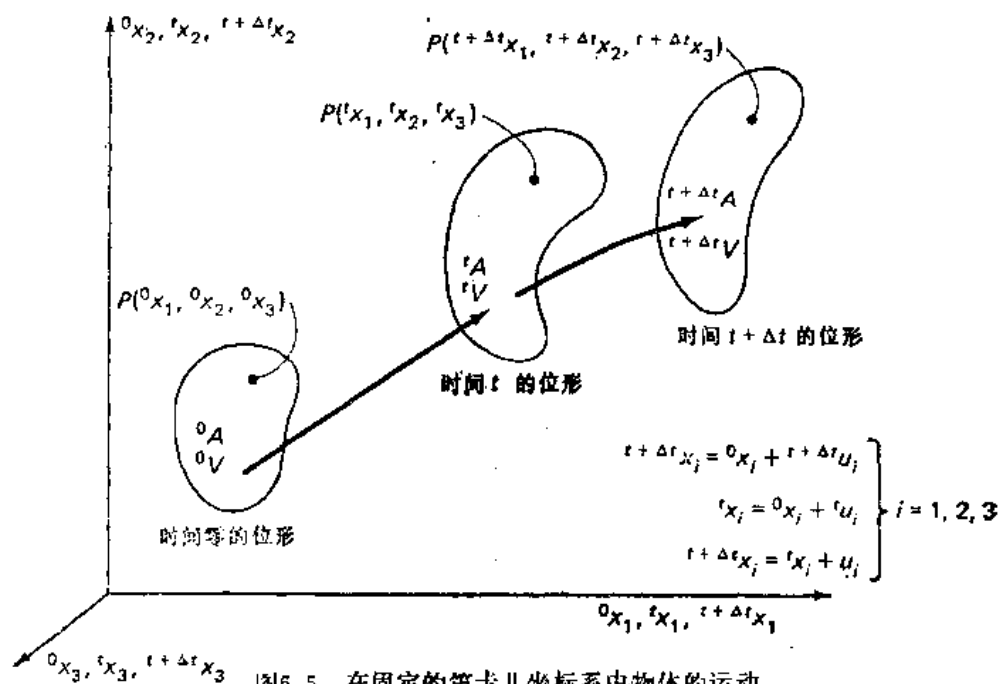
6.1节中对非线性分析作了引论式的讨论,其目的是描述各种非线性以及用于分析结构系统非线性响应的基本有限元方程。为了说明分析的过程,我们简单地列出了有限元方程,讨论它们的解并给出物理论证来说明为什么用这些方程可以恰当地预测非线性响应。通过两个非常简单问题的求解说明方法的可用性,仅是为了对所用的分析步骤有所了解。在每个分析中,运用物理论证导出了适用的有限元矩阵和向量。

在例6.1和6.2中使用的物理分析方法非常有教益,并给出了对分析的深入了解。然而,当考虑一个较复杂的解时,就必须采用一个符合连续介质力学基础的方法来推导有限元控制方程。本节的目的是提出基于位移的有限元解的连续介质力学控制方程。如在4.2.1节中那样,我们使用虚功原理,但现在包括这种可能性,即所考虑的物体经受大位移、大转角、大应变、并且应力—应变关系是非线性的。因此,要提出的连续介质力学控制方程可以看作是由式(4.5)给出的基本方程的推广。在一般物体的线性分析中,方程式(4.5)被用来作为推导线性有限元控制方程(在式(4.14)至式(4.20)中给出)的基础。考虑一般物体的非线性分析,在导出适用的连续介质力学方程之后,我们将用完全类似的方法着手建立控制物体非线性响应的非线性有限元方程(见6.3节)。

6.2.1 基本问题

6.1节我们强调了物体的平衡非线性分析必须建立在当前的位形中。我们还指出,通常采用增量表述,采用的时间变量要便于描述加载和物体的运动。

在以下的推导中,我们考虑一般物体在固定的笛卡儿坐标系中的运动,如图6.5所示,并假设物体有大位移、大应变和非线性本构响应。我们的目的在于求出整个物体在离散时间点 $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ 上的平衡位置,其中 Δt 是时间增量。为了推导求解对策,假设已



经得到了从时间零到时间 t 所包含的全部时间步长下的静态变量和运动学变量。于是下一步所要求的对应于时间 $t + \Delta t$ 的平衡位置的求解过程是标准的并可重复使用,用直至求出整个解的路径为止。因此,在分析中我们追踪物体全部质点从物体的原始位形到最终位形的运动,这意味着我们采取问题的拉格朗日(或材料)表述^[1-4]。这个方法与流体力学问题分析中通常是一个比欧拉表述更自然和更有效的分析方法。例如,采用带有大位移的结构问题的欧拉表述,必须创立新的控制体积(因为固体的边界连续变化)并且对流加速度项中的非线性很难处理(见7.4节)。

在拉格朗日增量分析方法中,我们用虚位移原理来表示物体在时间 $t + \Delta t$ 的平衡。应用张量符号(见2.6节),这个原理要求

$$\int_{t+\Delta t, V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} {}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (6.13)$$

其中 ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ 为Cauchy应力张量的笛卡儿分量, ${}_{t+\Delta t} l_{ij}$ 为无穷小应变张量的笛卡儿分量,而 δ 代表“对...的变分”,即

$$\delta_{t+\Delta t} l_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right)$$

应当指出Cauchy应力是在时间 $t + \Delta t$ 位形中的“每单位面积物体的内力”,无穷小应变分量也是参照这个尚是未知的位形。由于应变分量的变分等价于使用虚应变(见4.2.1节),我们看到(6.13)的左边乃是物体在时间 $t + \Delta t$ 时经受虚位移所作的虚功。相应的外虚功 ${}^{t+\Delta t} R$ 为

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t, V} {}^{t+\Delta t} f_i^b \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV + \int_{t+\Delta t, S} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i {}^{t+\Delta t} ds \quad (6.14)$$

其中 ${}^{t+\Delta t} f_i^b$ 和 ${}^{t+\Delta t} f_i^s$ 分别为外部作用的体积力和表面力向量的分量, δu_i 是虚位移向量的第 i 个分量。

应当指出,式(6.13)所说明的虚功原理仅仅是方程式(4.5)(用于线性分析)对所考虑物体在时间 $t + \Delta t$ 位形中的应用。因此,前面关于线性分析中适合于虚功原理应用的全部讨论和结论,只要是考虑时间 $t + \Delta t$ 的当前位形,现在就可直接应用。⊙

普遍使用式(6.13)的基本困难是不知道物体在时间 $t + \Delta t$ 的位形。与线性分析相比这是一个重要的区别,在线性分析中假设位移为无穷小,因而物体的位形不变。物体位形的连续变化给增量分析方法的推导留下了一些重要的影响。例如,一个重要的考虑是:简单地在Cauchy应力上加上仅由材料应变引起的时间 t 的应力增量是不能得到时间 $t + \Delta t$ 的Cauchy应力的。即计算在时间 $t + \Delta t$ 的Cauchy应力,还必须计入材料的刚体转动,因为当材料只经受刚体转动时,Cauchy应力张量的分量也在变化。

在大变形分析中物体位形连续变化的情况是以一种精巧的方式通过采用适当的应力度量和应变度量以及本构关系来处理的,下面几节将要详细讨论。

我们注意到通用的大变形分析,描述连续介质力学关系的一个难点是如何使用有效的符号,因为有许多不同的量需要处理。使用的符号应当表现全部必须的信息,但应该以一种紧凑的方法进行,以便方程能比较容易看懂。为了符号的有效使用,了解所采用的约定是非常有帮助的。为此,此处简略地归纳一下一些基本事实和我们符号中所用的约定。

⊙ 我们可以想象,对所考虑的运动物体在时间 $t + \Delta t$ 照像,然后将虚位移原理应用于物体在该像片中的状态。

在分析中, 我们考虑在固定笛卡儿坐标系中物体的运动, 如图6.5所示。全部运动和静态变量均在这个坐标系中度量, 并且在整个描述过程中都采用张量符号。

物体中一个一般点 P 在时间零的坐标为 ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$; 在时间 t 为 ${}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3$; 而在时间 $t + \Delta t$ 是 ${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3$, 其中左上标代表物体的位形, 而下标代表坐标轴。

物体位移的符号与坐标的符号相似, 即在时间 t 的位移是 ${}^tu_i, i = 1, 2, 3$; 在时间 $t + \Delta t$ 的位移是 ${}^{t+\Delta t}u_i, i = 1, 2, 3$; 因此, 得到

$$\left. \begin{aligned} {}^tx_i &= {}^0x_i + {}^tu_i \\ {}^{t+\Delta t}x_i &= {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3$$

从时间 t 到 $t + \Delta t$ 的位移增量用下列符号表示

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i; \quad i = 1, 2, 3$$

在物体运动期间, 其体积、表面积、质量密度, 应力以及应变都是连续变化的。我们用 ${}^0\rho, {}^t\rho, {}^{t+\Delta t}\rho; {}^0A, {}^tA, {}^{t+\Delta t}A$ 和 ${}^0V, {}^tV, {}^{t+\Delta t}V$ 分别表示物体在时间 $0, t$ 和 $t + \Delta t$ 的密度, 面积及体积。

由于物体在时间 $t + \Delta t$ 的位形是未知的, 我们把作用力、应力和应变参照于一个已知的平衡位形。类似于坐标和位移所采用的符号, 左上标指示该量(体力、表面拉力、应力等)发生的那个位形; 另外, 左下标指示度量该量的参考位形。例如, 在时间 $t + \Delta t$ 但在位形 0 中度量的表面力分量和体力分量为 ${}^{t+\Delta t}_0f_i^s, {}^{t+\Delta t}_0f_i^b, i = 1, 2, 3$ 。这里有一个例外情况, 如果所考虑的量发生的那个位形与它被度量的位形是同一个位形的话, 则可以不用左下标。例如, 对于Cauchy 应力我们得到

$${}^{t+\Delta t}\tau_{ij} = {}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t}\tau_{ij}$$

在控制平衡方程的表述中, 也需要考虑位移和坐标的导数。在我们的符号中, 逗号[,]表示对逗号后的坐标取导数, 表示时间的左下标指示度量这个坐标的位形; 这样, 我们得到, 例如:

$${}^{t+\Delta t}_0u_{i,j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_i}{\partial {}^0x_j}$$

和

$${}^{t+\Delta t}_0x_{m,n} = \frac{\partial {}^0x_m}{\partial {}^{t+\Delta t}x_n}$$

我们将用这些约定来定义首次遇到的新符号。

6.2.2 应力和应变张量

上一节我们简要地提到在大变形分析时必须特别注意物体的位形是连续变化的。通过定义辅助的应力和应变度量, 可以很精巧地处理此位形变化。定义的目的是通过一个已知的体积积分来表达式(6.13)中的内虚功, 并且能够以一种有效的方式增量地分解应力和应变。有各种不同的应力和应变张量, 它们原则上都可用。但如果目的是要得到有效的全部有限元求解过程, 则仅需考虑很少几个应力和应变度量。下面首先定义特定的应力和应变张量, 这些张量在虚功原理的增量表述中被认为是最有效的。然后我们讨论它们的性质, 特征以及为什么要在许多可能的应力和应变度量之中选择它们的原因。

我们将要大量使用的应力度量是第二 Piola-Kirchhoff 应力张量。在时间 t 参照时间零

的位形的第二Piola-Kirchhoff应力定义为

$${}^iS_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^i\rho} {}^0x_{i,m} {}^i\tau_{mn} {}^0x_{j,n} \quad (6.15)$$

其中 ${}^0x_{i,m} \equiv \partial^0x_i / \partial^i x_m$, 而 ${}^0\rho / {}^i\rho$ 代表时间零和时间 t 的质量密度之比。或者我们也可写为

$${}^i\tau_{mn} = \frac{{}^i\rho}{{}^0\rho} {}^0x_{m,i} {}^iS_{ij} {}^0x_{j,n} \quad (6.16)$$

其中 ${}^0x_{m,i}$ 现在为变形梯度 0X 的元素 (m, i)

$${}^0X = ({}^0\nabla^i x^T)^T \quad (6.17)$$

$${}^0\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^0x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^0x_2} \\ \frac{\partial}{\partial^0x_3} \end{bmatrix}, \quad {}^i x^T = [{}^ix_1 \ {}^ix_2 \ {}^ix_3] \quad (6.18)$$

由于所考虑质点的质量是守恒的, (6.15)式中的质量密度比可以算出如下:

$$\int_{iV} {}^i\rho d^i x_1 d^i x_2 d^i x_3 = \int_{0V} {}^0\rho d^0 x_1 d^0 x_2 d^0 x_3 \quad (6.19)$$

但

$$d^i x_1 d^i x_2 d^i x_3 = (\det {}^0_x) d^0 x_1 d^0 x_2 d^0 x_3$$

且由于关系式(6.19)中必须对任意数量的质点都成立, 故有

$${}^0\rho = {}^i\rho \det {}^0_x \quad (6.20)$$

因此, 一旦变形梯度为已知, 即可立即算出质量密度的变化, 而且只要Cauchy应力为已知, 相应的第二Piola-Kirchhoff应力就可以用纯运动学的变换关系算出。由于Cauchy应力张量是对称的, 故由关系式(6.15)和(6.16)可证明第二Piola-Kirchhoff应力张量也是对称的。

例6.5 考虑图6.6中的单元。计算变形梯度和对应于时间 t 的位形的质量密度。

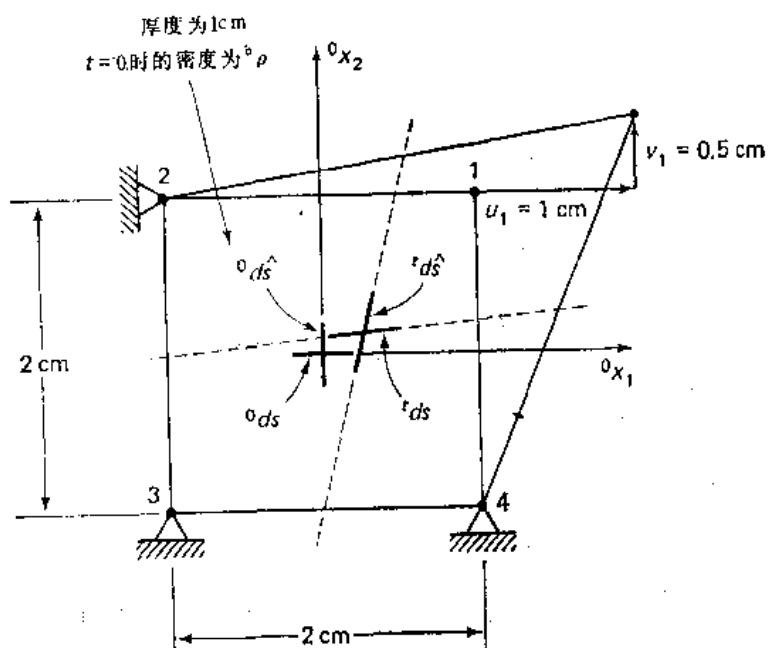


图6.6 经受大变形的4结点单元

图5.5中给出了此单元的位移插值函数。由于 0x_1 , 0x_2 轴分别对应于 r , s 轴, 故有

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+{}^0x_1)(1+{}^0x_2) & h_2 &= \frac{1}{4}(1-{}^0x_1)(1+{}^0x_2) \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-{}^0x_1)(1-{}^0x_2) & h_4 &= \frac{1}{4}(1+{}^0x_1)(1-{}^0x_2) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial {}^0x_1} &= \frac{1}{4}({}^0x_2)' & \frac{\partial h_2}{\partial {}^0x_1} &= -\frac{1}{4}({}^0x_2)' \\ \frac{\partial h_3}{\partial {}^0x_1} &= -\frac{1}{4}({}^0x_2)' & \frac{\partial h_4}{\partial {}^0x_1} &= \frac{1}{4}({}^0x_2)' \\ \frac{\partial h_1}{\partial {}^0x_2} &= \frac{1}{4}(1+{}^0x_1) & \frac{\partial h_2}{\partial {}^0x_2} &= \frac{1}{4}(1-{}^0x_1) \\ \frac{\partial h_3}{\partial {}^0x_2} &= -\frac{1}{4}(1-{}^0x_1) & \frac{\partial h_4}{\partial {}^0x_2} &= -\frac{1}{4}(1+{}^0x_1) \end{aligned}$$

现在我们用

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^4 h_k {}^t x_k^*$$

因此

$$\frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \right)' x_k^*$$

时间 t 的结点坐标为

$$\begin{aligned} {}^t x_1^* &= 2 & {}^t x_2^* &= 1.5 & {}^t x_3^* &= -1 & {}^t x_4^* &= 1 \\ {}^t x_1^* &= -1 & {}^t x_2^* &= -1 & {}^t x_3^* &= 1 & {}^t x_4^* &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} &= \frac{1}{4}[(1+{}^0x_2)(2) - (1+{}^0x_2)(-1) - (1-{}^0x_2)(-1) + (1-{}^0x_2)(1)] \\ &= \frac{1}{4}(5+{}^0x_2) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} &= \frac{1}{4}({}^0x_1)' & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} &= \frac{1}{8}(1+{}^0x_2) \\ \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} &= \frac{1}{8}(9+{}^0x_1) \end{aligned}$$

因此变形梯度为

$${}^t X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (5+{}^0x_2) & (1+{}^0x_1) \\ \frac{1}{2}(1+{}^0x_2) & -\frac{1}{2}(9+{}^0x_1) \end{bmatrix}$$

利用式(6.20), 变形后位形中的质量密度为

$$^t\rho = \frac{8^0\rho}{(5+^0x_2)(9+^0x_1) - (1+^0x_1)(1+^0x_2)}$$

第二 Piola-Kirchhoff 应力张量的最重要的特性是张量分量在材料的刚体转动中是一个不变量, 即材料经受刚体运动时它们不变化。我们用下面的简单例子来说明这一性质。

例6.6 图6.7示出一个在时间零的矩形中的4结点单元。单元受应力(初应力) $^0\tau_{11}$ 作用。假设单元作为一刚体从时间零到时间 Δt 以大角度 θ 转动, 且在附体坐标系中应力不变。因此, 图6.7所示 $^{\Delta t}\tau_{11}$ 的大小等于 $^0\tau_{11}$ 。试说明对于刚体转动, 第二Piola-Kirchhoff 应力张量的分量不变。

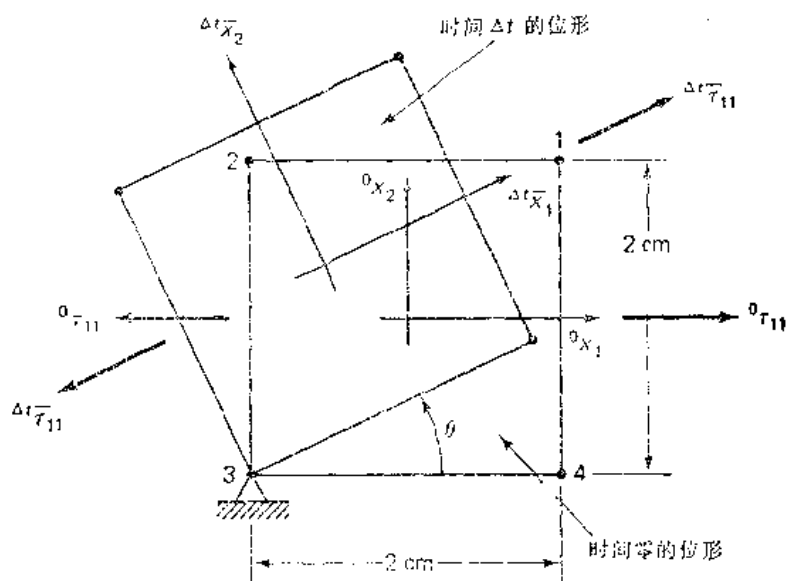


图6.7 经受大转动并有初应力的4结点单元

因为单元变形为零, 在时间零的第二Piola-Kirchhoff 应力张量等于Cauchy应力张量

$$^0S = \begin{bmatrix} ^0\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

用坐标轴 0x_1 、 0x_2 表示的时间 Δt 的Cauchy应力张量的分量为

$$^{\Delta t}\tau = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{\Delta t}\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (b)$$

这一变换对应于分量 $^{\Delta t}\tau_{11}$ 从附体坐标系 $^{\Delta t}\bar{x}_1$ 、 $^{\Delta t}\bar{x}_2$ 到固定坐标系 0x_1 、 0x_2 的二阶张量变换(见2.6节)。

Cauchy 应力和第二Piola-Kirchhoff 应力之间在时间 Δt 的关系按式(6.16)为

$$^{\Delta t}\tau = \frac{^{\Delta t}\rho}{^0\rho} {}^{\Delta t}X {}^{\Delta t}S {}^{\Delta t}X^T \quad (c)$$

此时, $^{\Delta t}\rho/^0\rho = 1$ 。变形梯度可如例6.5中那样求出, 其中应注意到时间 t 的结点坐标为

$$\begin{aligned} ^{\Delta t}x_1^1 &= 2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta & ^{\Delta t}x_2^1 &= 2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta \\ ^{\Delta t}x_1^2 &= -1 - 2\sin\theta & ^{\Delta t}x_2^2 &= 2\cos\theta - 1 \\ ^{\Delta t}x_1^3 &= -1 & ^{\Delta t}x_2^3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\Delta^t x_1^* = 2\cos\theta - 1$$

$$\Delta^t x_2^* = 2\sin\theta - 1$$

因此, 利用例6.5给出的插值函数的导数, 我们有

$$\Delta^t X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 + {}^0x_2)(2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) & (1 + {}^0x_1)(2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) \\ -(1 + {}^0x_2)(-1 - 2\sin\theta) & (1 - {}^0x_1)(-1 - 2\sin\theta) \\ -(1 - {}^0x_2)(-1) & -(1 - {}^0x_1)(-1) \\ (1 - {}^0x_2)(2\cos\theta - 1) & -(1 + {}^0x_1)(2\cos\theta - 1) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (1 + {}^0x_2)(2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) & (1 + {}^0x_1)(2\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) \\ -(1 + {}^0x_2)(2\cos\theta - 1) & (1 - {}^0x_1)(2\cos\theta - 1) \\ -(1 - {}^0x_2)(-1) & -(1 - {}^0x_1)(-1) \\ (1 - {}^0x_2)(2\sin\theta - 1) & -(1 + {}^0x_1)(2\sin\theta - 1) \end{bmatrix}$$

或

$$\Delta^t X = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (d)$$

把式(b)和式(d)代入式(c), 可得

$$\Delta^t S = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (e)$$

但是, 由于 ${}^t\tau_{11}$ 等于 ${}^0\tau_{11}$, 关系式(a)和式(e)说明在刚体转动中第二 Piola-Kirchhoff 应力张量的分量不变。其所以不变的原因是变形梯度此时与在式(b)的变换中所用的转动矩阵相符(见例6.12)。

关于第二 Piola-Kirchhoff 应力张量的物理特性已进行了不少讨论。然而, 虽可把式(6.15)中 Cauchy 应力张量的变换与在下例讨论的一些几何论点联系起来, 但必须看到第二 Piola-Kirchhoff 应力没有什么物理意义, 但在实际中 Cauchy 应力是必须求出的。

例6.7 图6.8表示在时间零与 t 的位形中的一个普通物体。令 ${}^t dT$ 为时间 t 的位形中表面积 ${}^t dS$ 上的实际作用力, 让我们定义一个(虚拟的)力为

$${}^0 dT = {}^0 X^t dT, \quad {}^0 X = \left[\frac{\partial {}^0 x_i}{\partial {}^t x_j} \right] \quad (a)$$

它作用在表面积 ${}^0 dS$ 上, 其中 ${}^0 dS$ 已变为 ${}^t dS$, 而 ${}^0 X$ 为变形梯度的逆, 即 ${}^0 X = {}^0 X^{-1}$ 。试说明在原位形中度量的第二 Piola-Kirchhoff 应力对应于 ${}^0 dT$ 的应力分量。

令面积 ${}^0 dS$ 和 ${}^t dS$ 的单位法线分别为 ${}^0 n$ 和 ${}^t n$ 。在时间 t 的位形中, 力的平衡(图6.8中的楔 ABC)要求

$${}^t dT = {}^t \tau^{Tt} n^t dS \quad (b)$$

同样, 在时间零的位形中有

$${}^0 dT = {}^0 S^{T0} n^0 dS \quad (c)$$

关系式(b)和式(c)称为Cauchy公式。然而, 可以说明存在下列运动关系

$${}^t n^t dS = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 X^{T0} n^0 dS \quad (d)$$

这种关系称为Nanson公式。现在利用(a)至(d), 得到

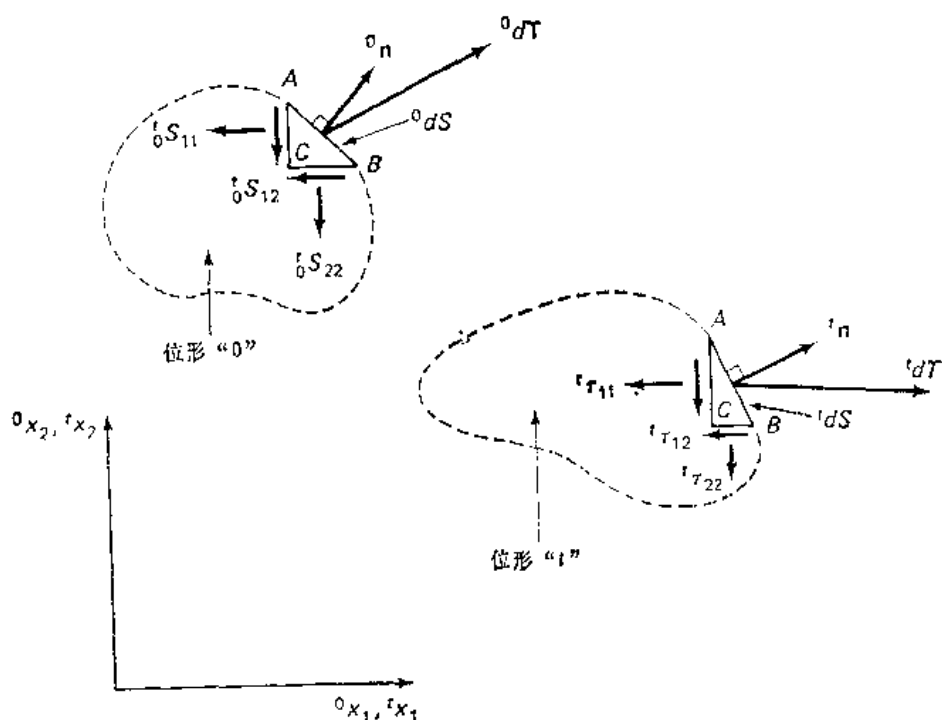


图6.8 在二维作用中的第二Piola-Kirchhoff应力和Cauchy应力

$${}^1S^T n^0 dS = {}^1X^T \tau^T - \frac{{}^0\rho}{{}^1\rho} {}^1X^T n^0 dS$$

或

$$\left({}^1S^T - \frac{{}^0\rho}{{}^1\rho} {}^1X^T \tau^T {}^1X^T \right) n^0 dS = 0$$

然而, 这种关系必须对任意表面面积以及由于切割物体而产生的任意“内表面面积”成立。因此, 法线 n 是任意的, 并可依次选作等于单位坐标向量。于是有

$${}^1S = \frac{{}^0\rho}{{}^1\rho} {}^1X^T \tau^T {}^1X^T$$

其中我们已使用矩阵 τ 和 S 是对称的这一性质。

最后, 可以解释式(a)中定义的力; 即应该注意到为第二 Piola-Kirchhoff 应力所平衡的力 0dT 与实际力 1dT 之间的关系和 0dS 中原始纤维与其最终位置之间的关系是相同的,

$$d^0x = {}^1X d^1x$$

因此, 我们可以说, 在用式(a)得到 0dT 时, 力 1dT 被拉伸和转动, 其方式与拉伸和转动 d^1x 以得到 d^0x 相同。

在式(6.15)中我们参照物体的原始位形定义了时间 t 的第二Piola-Kirchhoff 应力张量, 然而, 我们也可以用另一个参考位形。特别是在增量表述中我们还要用到以时间 t 的位形为参照标准的时间 $t + \Delta t$ 的第二 Piola-Kirchhoff 应力。

另一个有效地应用于某些表述中的应力度量是Jaumann应力率张量,其定义为

$${}^t\tau_{ij} = {}^t\dot{\tau}_{ij} - {}^t\tau_{ip}{}^t\Omega_{pj} - {}^t\tau_{jp}{}^t\Omega_{pi} \quad (6.21)$$

其中 ${}^t\dot{\tau}_{ij}$ 是在时间 t 的 Cauchy 应力张量时间导数的笛卡儿分量, 而 ${}^t\Omega_{ij}$ 是旋转张量的笛卡儿分量,

$${}^t\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t \dot{u}_j}{\partial^t x_i} - \frac{\partial^t \dot{u}_i}{\partial^t x_j} \right) \quad (6.22)$$

在物理意义上, 旋转张量代表材料的角速度。

例6.8 考虑二维分析中一点的速度梯度 $\partial^t \dot{u}_i / \partial^t x_j$ 。试说明式(6.22)给出的旋转张量怎样与此张量相联系。

在二维分析中我们可以把速度梯度分解为一个对称的和一个反对称的张量

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_1} & \frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_2} \\ \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_1} & \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_2} + \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_2} + \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_1} \right) & \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_1} - \frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t \dot{u}_1}{\partial^t x_2} - \frac{\partial^t \dot{u}_2}{\partial^t x_1} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

其中式(a)右边的第一项代表速度应变张量(见(6.24)), 第二项为旋转张量。为了得到这些张量的物理解释, 考虑从时间 t 开始的无穷小时间增量中的运动, 于是得到

$$\int \frac{\partial^t \dot{u}_i}{\partial^t x_j} dt = \frac{\partial u_i}{\partial^t x_j}$$

我们首先假设这个运动和图6.9(a)所示的刚体转动是一致的。这时有

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial^t x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial^t x_2} \right)$$

$${}^t\Omega_{12} = \alpha$$

且速度应变张量为零。因此这个运动完全由旋转张量所描述, 其中 ${}^t\Omega_{12}$ 为对 ${}^t x_3$ 轴的角速度。

另一方面, 如果是图6.9(b)所描述的运动, 因为没有刚体转动且速度应变张量中的元素给出材料的瞬时应变率, 所以旋转张量为零。

考虑式(6.21)中的Jaumann应力率张量, 我们可看到此张量也是对称的, 并且如果 ${}^t\tau_{ij}$ 为零, 则关系式(6.21)恰当地算出了由材料刚体转动所引起的Cauchy应力的变化。我们以下例来说明这一重要特性。

例6.9 图6.10所示的二维单元在时间 t 受应力 10 N/cm^2 和一角速度 ω 的作用。假设单元作为一刚体以不变的速度 ω 旋转 90° 。用关系式(6.21)计算旋转结束时单元中的应力。

时间零的应力张量为

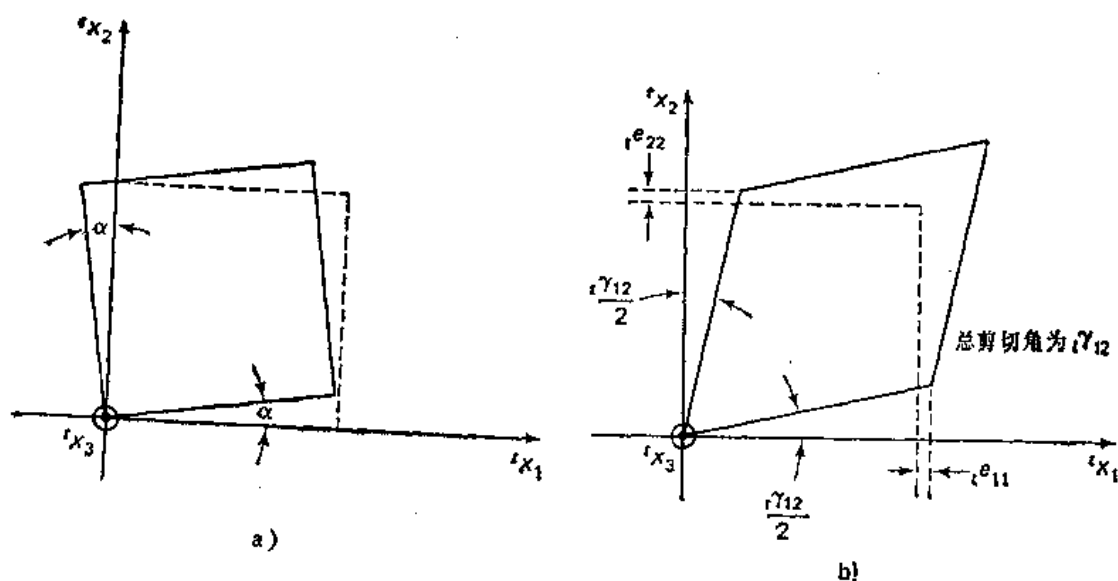


图6.9 旋转张量图解

a) 刚体转动 θ_{12} 等于 α 对时间的变化率 b) 无刚体转动时的变形, 剪应变为 γ_{12} , 而正应变为 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$

$${}^0\tau = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

由于单元作为刚体旋转 90° , 我们知道在转动结束时正确的应力张量 (对应于固定坐标轴 x_1, x_2 为

$${}^1\tau \Big|_{\text{转}90^\circ\text{后}} = 10 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

因此, 以式 (a) 中给出的初始条件积分式 (6.21) 就应得到式 (b)。

图6.10 具有应力为 10N/cm^2 和常角速度为 $\omega\text{rad/sec}$ 的单元

让我们来运用欧拉向前积分法 (见 9.6 节), 其中假设

$${}^1\dot{\tau} = \frac{{}^{1+\Delta t}\tau - {}^1\tau}{\Delta t}$$

于是式 (6.21) 可写为, 当 ${}^1\dot{\tau}_{ii} = 0$ 时,

$${}^{1+\Delta t}\tau = {}^1\tau + {}^1\tau^T \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} {}^1\tau \quad (c)$$

其中

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}$$

如果想用 n 步使单元旋转 90° , 以 (a) 中的初始条件运算式 (c), 可得到下列结果:

$$n = 10$$

$${}^{10}\tau = 10 \begin{bmatrix} -0.304 & 0.06 \\ 0.06 & 1.304 \end{bmatrix}$$

$$n = 50$$

$${}^{50}\tau = 10 \begin{bmatrix} -0.052 & 0.002 \\ 0.002 & 1.052 \end{bmatrix}$$

$$n = 150$$

$${}^{150}\tau = 10 \begin{bmatrix} -0.017 & 0.0002 \\ 0.0002 & 1.017 \end{bmatrix}$$

$$n = 500$$

$${}^{500}\tau = 10 \begin{bmatrix} -0.005 & 0.00002 \\ 0.00002 & 1.005 \end{bmatrix}$$

因此,我们应注意到,应用欧拉向前积分时,需要用许多步才能逼近式(b)给出的正确解的精确近似值。实际上,应如导出(b)式结果那样,通过简单地变换应力来建立对于一给定的总角转动的解。

在这点上对比第二 Piola-Kirchhoff 应力和 Jaumann 应力率张量是很有启发性的。两种应力度量都只是材料变形的函数,且不受刚体运动的影响。因此它们分别为目标应力张量和目标应力率张量。实际上,这两个应力度量的一个重要的区别是第二 Piola-Kirchhoff 应力是总应力,它在弹性或超弹性本构特性下可以从当前的总应变中计算出来(见 6.4.1 节),而 Jaumann 应力率与应变率有关,这就意味着总是需要通过积分来计算当前的 Cauchy 应力。这一明显的区别已经指出了在什么条件下使用一种应力度量比另一种更有效。即,如果本构关系不是路径相关的,则不需要积分过程,使用第二 Piola-Kirchhoff 应力张量通常更有效,而对路径相关材料的分析,就应考虑使用 Jaumann 应力率张量(见 6.4 节)。

我们将在增量表述中使用已经提出并简单讨论过的应力张量,现在转而讨论适当的应变度量。与第二 Piola-Kirchhoff 应力张量一同使用的应变张量是 Green-Lagrange 应变张量,定义为

$${}^1\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^1u_{i,j} + {}^1u_{j,i} + {}^1u_{k,i}{}^1u_{k,j}) \quad (6.23)$$

其中 ${}^1u_{i,j} = \partial^1u_i / \partial^0x_j$ 。与 Jaumann 应力率张量一同使用的应变度量是速度应变张量,或变形率张量(见 6.8 例),

$${}^1\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^1\dot{u}_i}{\partial^1x_j} + \frac{\partial^1\dot{u}_j}{\partial^1x_i} \right) \quad (6.24)$$

这些应变度量满足相应应力度量所满足的同样条件,即它们是对称张量,也是目标张量,这就意味着材料的刚体运动并不改变它们的分量(见例 6.8 和 6.13)。此外,它们还需满足另一要求,这是在增量表述中使用它们的必要条件:这些应变张量与前面所叙述的应力张量是能量共轭的,即若令

$$\int {}^1\dot{e}_{ij} dt = e_{ij}$$

则 ${}^t\tau_{ij}\delta e_{ij}$ 为单位当前体积在时间 t 的虚功

${}^0S_{ij}\delta e_{ij}$ 为单位原始体积在时间 t 的虚功

因此, 如果分别使用能量共轭的应变张量, 并且积分是分别在当前的和原始的体积上进行的, 则无论是Cauchy应力张量还是第二Piola-Kirchhoff应力张量都可用来计算总的内虚功。在推导了与Green-Lagrange应变张量有关的一些基本运动学关系后, 我们在式(6.36)至式(6.37)中证明了第二Piola-Kirchhoff应力和Green-Lagrange应变张量是能量共轭的。

Green-Lagrange应变张量的分量已在式(6.23)中给出。但如果我们集中注意一个在原始位形中长度为 0ds 的线单元, 它在当前位形中长度为 tds , 我们也可把分量为 ${}^t\epsilon_{ij}$ 的Green-Lagrange应变张量定义为

$${}^t\epsilon_{ij}d^0x_id^0x_j = -\frac{1}{2}\{({}^tds)^2 - ({}^0ds)^2\} \ominus \quad (6.25)$$

其中

$$({}^tds)^2 = d^tx_id^tx_i \quad (6.26)$$

$$({}^0ds)^2 = d^0x_id^0x_i \quad (6.27)$$

由于

$$d^tx_i = \frac{\partial^tx_i}{\partial^0x_j} d^0x_j \quad (6.28)$$

可写出

$$({}^tds)^2 = d^0x_i^T X^T X d^0x_i \quad (6.29)$$

其中 tX 是式(6.17)中定义的变形梯度。另外, 在式(6.29)中有

$$d^0x = \begin{bmatrix} d^0x_1 \\ d^0x_2 \\ d^0x_3 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

利用式(6.30), 可把式(6.25)的左边写为:

$${}^t\epsilon_{ij}d^0x_id^0x_j = d^0x_i^T {}^t\epsilon d^0x_i \quad (6.31)$$

其中 ${}^t\epsilon_{ij}$ 是矩阵 ${}^t\epsilon$ 的第 (i, j) 个元素。

$${}^t\epsilon = \frac{1}{2}({}^tC - I) \quad (6.32)$$

tC 是Cauchy-Green变形张量 $\ominus$, 定义为

$${}^tC = {}^tX^T {}^tX \quad (6.33)$$

关系式(6.32)可看作是Green-Lagrange应变张量的另一种定义, 这里把Cauchy-Green变形张量作为基本量使用。为了从式(6.32)得到关系式(6.23), 我们用式(6.33)和式(6.17)代入 tC 和 tX

$$\begin{aligned} {}^t\epsilon &= \frac{1}{2}({}^tX^T {}^tX - I) \\ &= \frac{1}{2}\{[{}_0\nabla({}^0x + {}^tu)^T][{}_0\nabla({}^0x + {}^tu)^T]^T - I\} \end{aligned}$$

⊖ 注意, 与符号 $\partial^tx_i/\partial^0x_j$ 一致, 这里我们用符号 $d^0x_i \equiv d({}^0x_i)$; 因此左时间上标是在“ x_i ”上。然而, tds 被拉伸长为 tds , 因此, 左时间上标是在“ ds ”上。

⊖ tC 可更精确地称为右Cauchy-Green变形张量, 因为还有一个左Cauchy-Green变形张量, 然而在本书中并不使用。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \{ (I + {}^0\nabla' u^T) (I + {}^0\nabla' u^T)^T - I \} \\
&= \frac{1}{2} \{ {}^0\nabla' u^T + ({}^0\nabla' u^T)^T + ({}^0\nabla' u^T) ({}^0\nabla' u^T)^T \} \quad (6.34)
\end{aligned}$$

因此关系式(6.23)、式(6.25)和式(6.32)全是等价的, 都可用来求解 Green-Lagrange 应变张量的分量。

例6.10 考虑图6.6中所示的4结点单元。当单元经受给定位移时求 Green-Lagrange 应变张量的分量。

由于我们已经求出了例6.5中的变形梯度, 现在用(6.32)和(6.33)求 Green-Lagrange 应变就很方便了。于是, 我们得到

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{16} \left(\frac{(5 + {}^0x_2)^2 + \frac{1}{4}(1 + {}^0x_2)^2}{(1 + {}^0x_1)(5 + {}^0x_2) + \frac{1}{4}(9 + {}^0x_1)(1 + {}^0x_2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(5 + {}^0x_2)(1 + {}^0x_1) + \frac{1}{4}(1 + {}^0x_2)(9 + {}^0x_1)}{(1 + {}^0x_1)^2 + \frac{1}{4}(9 + {}^0x_1)^2} \right) \right] \\
&\quad - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{C}$ 和变形梯度 $\mathbf{X}$ 有一些重要的性质, 将在下面两例中进行研究。

例6.11 一般物体的线单元在运动中的拉伸 λ 定义为 $\lambda = {}^t ds / {}^0 ds$, 其中 ${}^0 ds$ 和 ${}^t ds$ 为单元的原始和当前长度, 如图6.11所示。试证明

$$\lambda = ({}^0 \mathbf{n}^T \mathbf{C} {}^0 \mathbf{n})^{1/2} \quad (a)$$

其中 ${}^0 \mathbf{n}$ 是线单元在时间零的方向余弦向量, 并证明若考虑发自同一材料点的两个线单元, 则在时间 t 线单元之间的夹角 θ 可由下式给出

$$\cos \theta = \frac{{}^0 \mathbf{n}^T \mathbf{C} {}^0 \hat{\mathbf{n}}}{\lambda \hat{\lambda}} \quad (b)$$

其中符号“ $\wedge$ ”表示第二个线单元(见图6.11)。

作为一个例子, 用公式(a)和式(b)求图6.6所示特定线单元 ${}^0 ds$ 和 ${}^t ds$ 的拉伸并计算它们之间的角变形。

为证明式(a), 我们看到

$$({}^t ds)^2 = d^t \mathbf{x}^T d^t \mathbf{x}, \quad d^t \mathbf{x} = \mathbf{X} d^0 \mathbf{x}$$

因此用式(6.33)

$$({}^t ds)^2 = d^0 \mathbf{x}^T \mathbf{C} d^0 \mathbf{x}$$

这样

$$\lambda^2 = \frac{d^0 \mathbf{x}^T}{{}^0 ds} \mathbf{C} \frac{d^0 \mathbf{x}}{{}^0 ds}$$

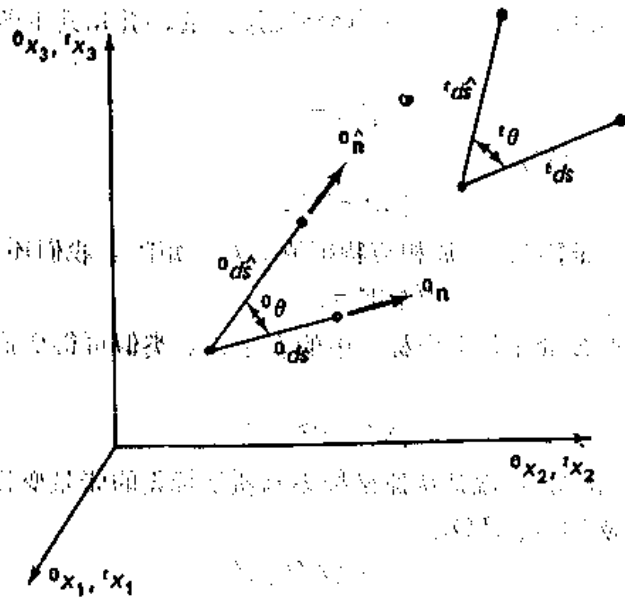
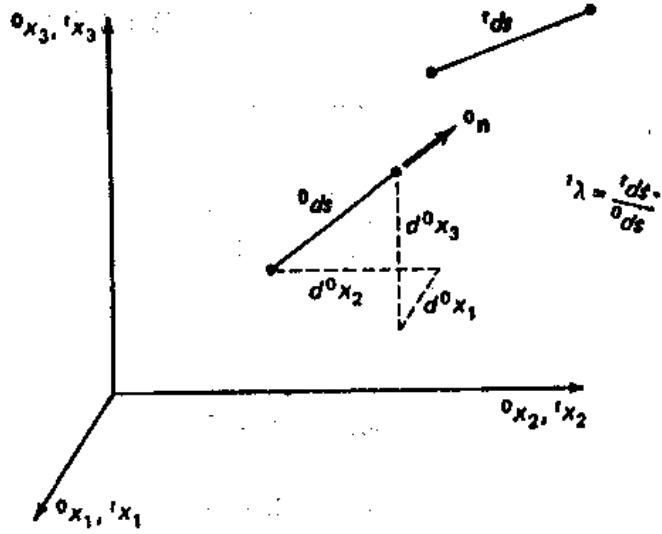


图6.11 线单元的拉伸和转动

由于

$${}^0n = \frac{d^0x}{ds}$$

我们有

$${}^1\lambda = ({}^0n^T {}^1C {}^0n)^{1/2}$$

为证明式(b)，我们用(见2.6节)

$$d^1x^T \cdot d^1x = ({}^1ds)({}^1ds)\cos^1\theta$$

这样

$$\cos \theta = \frac{d^0 x^T \hat{X}^T \hat{X} d^0 x}{(d^0 s)(d^0 s)} \quad (c)$$

应当指出, 关系式(a)和式(b)表示: 当 $\hat{C} = I$ 时, 线单元的拉伸等于1, 而且线单元之间的夹角在运动中不变。因此, 当Cauchy-Green变形张量等于单位矩阵时, 运动至多只能是一种刚体运动。

如果我们把式(a)和式(b)用于图6.6所示的线单元, 在 $^0x_1 = 0$, $^0x_2 = 0$ 时可得到(见例6.5)

$$\hat{C} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 25.25 & 7.25 \\ 7.25 & 21.25 \end{bmatrix}$$

$$^0n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样, 用式(a)

$$^0\lambda = 1.256, \quad \hat{\lambda} = 1.152$$

用式(b)

$$\cos \theta = 0.313, \quad \theta = 71.75^\circ$$

因此, 由于从时间零到时间 t 的运动, 线单元 0ds 和 $\hat{ds}$ 间的角变形为18.25度。

例6.12 证明变形梯度 $\hat{X}$ 通常可以分解为

$$\hat{X} = \hat{R} \hat{U} \quad (a)$$

其中 $\hat{R}$ 是正交(旋转)矩阵, $\hat{U}$ 是拉伸(对称的)矩阵。

为证明关系式(a), 我们考虑Cauchy-Green变形张量 $\hat{C}$ 并用其主坐标轴来表示该张量。为此解特征问题

$$\hat{C}p = \lambda p \quad (b)$$

式(b)的全解可写为(见2.7节)

$$\hat{C}p = p \hat{C}'$$

其中 p 是 $\hat{C}$ 的特征向量, 而 $\hat{C}'$ 是存放相应特征值的对角矩阵。我们还有

$$p^T \hat{C}p = \hat{C}' \quad (c)$$

$\hat{C}'$ 是Cauchy-Green变形张量在其主坐标系中的表达式。类似可得变形梯度在此坐标系中的表达式 $\hat{X}'$:

$$\hat{X}' = p^T \hat{X} p \quad (d)$$

其中我们应注意到式(c)和式(d)就是从原坐标系到新坐标系的张量变换(见2.6节)。

利用以上关系式以及 $\hat{C} = \hat{X}^T \hat{X}$, 有

$$\hat{C}' = \hat{X}'^T \hat{X}'$$

我们注意到矩阵

$$\hat{R}' = \hat{X}' (\hat{C}')^{-1/2}$$

是一个正交矩阵, 即 $\hat{R}'^T \hat{R}' = I$

因此, 我们可写为

$$\hat{X}' = \hat{R}' \hat{U}' \quad (e)$$

其中

$$\hat{U}' = (\hat{C}')^{1/2}$$

并用 $\hat{C}'$ 的对角线元素平方根的正值计算 $\hat{U}'$ 。

关系式(e)把变形梯度 $\mathbf{X}'$ 分解为正交矩阵 $\mathbf{R}'$ 和拉伸矩阵 $\mathbf{U}'$ 的乘积。这一分解在 $\mathbf{C}$ 的主轴系中已经完成,但因变形梯度是张量(见2.6节),它在任何其它的(允许的)坐标系中也是有效的,的确,现在可以直接得到对应于(a)式中分解的 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{U}$,即

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \mathbf{R}' \mathbf{P}^T$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{P} \mathbf{U}' \mathbf{P}^T$$

其中我们已利用式(d)中所用变换的逆。

张量 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{X}$ 性质(在例6.11和6.12中讨论过)的两个重要结论是:第二Piola-Kirchhoff应力分量和Green-Lagrange应变分量在刚体运动中是不变的。当物体受刚体运动作用时,第二Piola-Kirchhoff应力分量和Green-Lagrange应变分量不变,因为此时变形梯度化为旋转矩阵,且Cauchy-Green变形张量为单位矩阵。为了说明第二Piola-Kirchhoff应力分量在刚体转动中的不变性,我们考虑例6.6中的一种特殊情况。事实上,从(6.32)可直接得到刚体运动的Green-Lagrange应变分量为零(因为此时 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$),我们用下例来说明这一特性。

例6.13 一个4结点单元一直拉伸到时间 t ,然后从时间 t 到 $t + \Delta t$ 进行了无变形的大刚体转动,如图6.12所示。试明确地证明此单元的Green-Lagrange应变张量的分量在时间 t 和 $t + \Delta t$ 是完全相等的。

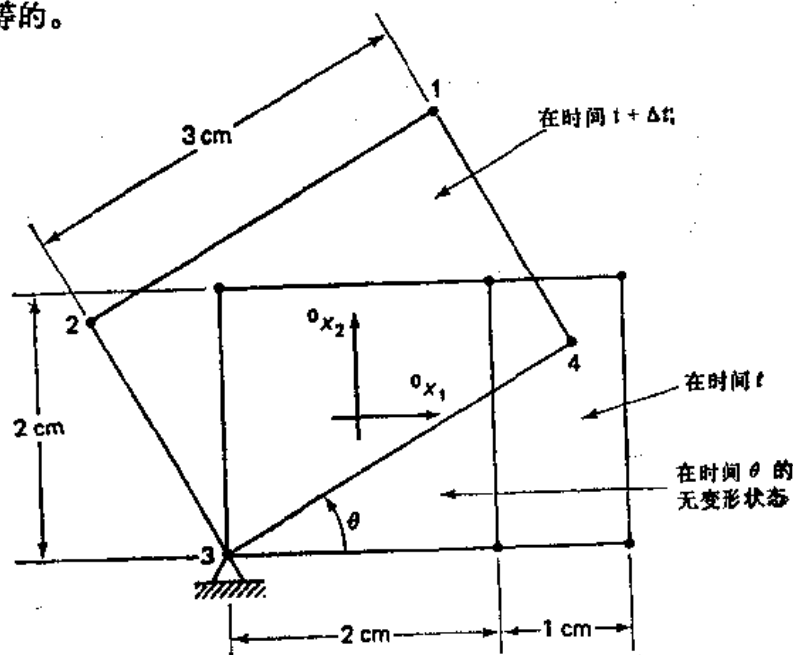


图6.12 在初始拉伸后作大刚体转动的单元

时间 t 的Green-Lagrange应变分量可从式(6.25)中由观察算出:

$$\epsilon_{22} = 0; \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0$$

和

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{2} \frac{{}^t d s^2 - {}^0 d s^2}{{}^0 d s^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(3)^2 - (2)^2}{(2)^2} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

因此

$${}^0\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

另一方面可用式(6.32)，先如例6.5那样算出变形梯度：

$${}^0X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$${}^0C = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如前

$${}^0\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

刚体转动后结点坐标为

结点	${}^{t+\Delta t}x_1$	${}^{t+\Delta t}x_2$	(a)
1	$3\cos\theta - 1 - 2\sin\theta$	$3\sin\theta - 1 + 2\cos\theta$	
2	$-1 - 2\sin\theta$	$2\cos\theta - 1$	
3	-1	-1	
4	$3\cos\theta - 1$	$3\sin\theta - 1$	

因此再用例6.5的步骤求变形梯度，可得

$${}^{t+\Delta t}{}_0X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+{}^0x_2)(3\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) & (1+{}^0x_1)(3\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) \\ -(1+{}^0x_2)(-1 - 2\sin\theta) & (1+{}^0x_1)(-1 - 2\sin\theta) \\ -(1+{}^0x_2)(-1) & (1+{}^0x_1)(-1) \\ (1+{}^0x_2)(3\cos\theta - 1) & (1+{}^0x_1)(3\cos\theta - 1) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (1+{}^0x_2)(3\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) & (1+{}^0x_1)(3\sin\theta - 1 + 2\cos\theta) \\ -(1+{}^0x_2)(2\cos\theta - 1) & (1+{}^0x_1)(2\cos\theta - 1) \\ -(1+{}^0x_2)(-1) & (1+{}^0x_1)(-1) \\ (1+{}^0x_2)(3\sin\theta - 1) & (1+{}^0x_1)(3\sin\theta - 1) \end{bmatrix} \quad (b)$$

或

$${}^{t+\Delta t}{}_0X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cos\theta & -\sin\theta \\ \frac{3}{2}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (c)$$

参照例6.12的讨论，可以注意到该变形梯度可写为

$${}^{t+\Delta t}{}_0X = {}^{t+\Delta t}{}_0R {}^{t+\Delta t}{}_0U \quad (d)$$

其中

$${}^{1+\Delta}R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad {}^{1+\Delta}U = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

该分解当然对应于实际的物理状态(我们度量过 0x_1 方向的拉伸,随后度量过它的转动)。因此,我们可用(d)式建立 ${}^{1+\Delta}X$ 而不必进行导出式(b)和式(c)的全部计算!

用式(d)和式(6.33),可得

$${}^{1+\Delta}C = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这样用式(6.32)有

$${}^{1+\Delta}\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此式(a)中的 ϵ 等于式(e)中的 ${}^{1+\Delta}\epsilon$,这就证明了当刚体转动后,Green-Lagrange应变分量不变。

利用上面讨论过的运动学关系,现在我们还可以证明下列Green-Lagrange应变张量和变形张量之间的重要关系

$$\delta_i^j \epsilon_{ij} = \frac{\partial^i x_m}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^i x_n}{\partial^0 x_j} \delta_{,m} e_{nn} \quad (6.35)$$

其中 δ 代表“变分”或“无穷小虚增量”。我们在下例中来证明这一点。

例6.14 证明下列关系成立

$$\delta_i^j \epsilon_{ij} = \frac{\partial^i x_m}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^i x_n}{\partial^0 x_j} \delta_{,m} e_{nn} \quad (a)$$

其中

$$\delta_i^j \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^i u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^i u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^0 x_j} \right),$$

$$\delta_{,m} e_{nn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_m}{\partial^i x_n} + \frac{\partial \delta u_n}{\partial^i x_m} \right)$$

δu_i 是位移 ${}^i u_i$ 的变分(或虚增量)。

利用式(6.25)至式(6.27)证明关系式(a);这样,有

$$2\delta_i^j \epsilon_{ij} d^0 x_i d^0 x_j = d^i x_i d^i x_i - d^0 x_i d^0 x_i$$

因为 $\delta d^0 x_i = 0$,可得

$$2\delta_i^j \epsilon_{ij} d^0 x_i d^0 x_j = 2(\delta d^i x_i) d^i x_i$$

但

$$\delta d^i x_i = d \delta^i x_i = d \delta u_i = \frac{\partial \delta u_i}{\partial^i x_i} d^i x_i$$

因此

$$2\delta_i^j \epsilon_{ij} d^0 x_i d^0 x_j = 2 \frac{\partial \delta u_i}{\partial^i x_i} d^i x_i d^i x_i$$

或

$$2\delta_i^j \epsilon_{ij} d^0 x_i d^0 x_j = 2(\delta_{,m} e_{nn}) d^i x_m d^i x_n$$

于是
$$2\delta_0^t \epsilon_{ij} d^0 x_i d^0 x_j = 2(\delta_{,e_{mn}}) \frac{\partial^t x_m}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^t x_n}{\partial^0 x_j} d^0 x_i d^0 x_j$$

由于上述关系必须对任意的 $d^0 x_i$ 和 $d^0 x_j$ 均能成立, 因此我们已证明了关系式(a)。

现在可以证明第二Piola-Kirchhoff 应力张量与Green-Lagrange应变张量是能量共轭的。考虑积分 $\int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij} dV$ 并代入(6.15)和(6.35), 得

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij} dV &= \int_{0V} \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 x_{i,m} {}^0 x_{j,n} {}^t \tau_{mn} {}^0 x_{k,i} {}^0 x_{l,j} \delta_{,e_{kl}} dV \\ &= \int_{0V} \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^t \tau_{mn} \delta_{,e_{mn}} dV \end{aligned} \quad (6.36)$$

因为 ${}^0 x_{k,i} {}^0 x_{l,m} = \delta_{km}$ (Kronecker delta)

并且由于 ${}^0 \rho dV = {}^t \rho dV$, 故有

$$\int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij} dV = \int_{tV} {}^t \tau_{mn} \delta_{,e_{mn}} dV \quad (6.37)$$

利用第二Piola-Kirchhoff应力和Green-Lagrange应变张量的虚功表达式(6.36)是以固体和结构非线性分析中使用的增量拉格朗日表述为基础的。本节我们定义了所使用的应力和应变分量。适当的本构关系式的应用将在6.4节中讨论。

6.2.3 全量与修正的拉格朗日表述, 仅材料非线性的分析

在6.1和6.2.1节中我们已讨论了分析一般非线性问题的基本难点和求解方法, 得到的结论是, 对于有效的增量分析需要使用恰当的应力和应变度量。在6.2.2节中导出了在实践中使用非常有效的一些应力和应变张量表达式, 然后引向用第二Piola-Kirchhoff应力和Green-Lagrange应变表示的虚位移原理。现在我们使用这一基本结果来推导非线性问题的两个通用的增量表述。

我们要求解的基本方程是关系式(6.13), 它表示所考虑的一般物体对应于时间 $t + \Delta t$ 位形的平衡和协调要求(本构方程也包括在式(6.13)中, 即包括在应力计算过程中)。一般由于物体可能有大位移和大应变, 且本构关系是非线性的, 所以不能直接解出关系式(6.13); 然而, 使全部变量都参照于前面算出的已知平衡位形, 并使最终方程线性化, 就可得到近似解。然后这个解可用迭代法进一步改善。

为了推导由线性化得到的近似解的控制方程, 我们记得在时间 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ 的解已经求出, 且可以用式(6.37)把应力和应变都参照于这些已知平衡位形之一。因此, 原则上可以利用任一已求出的平衡位形。但实际上, 这种选择基本上是在称之为全量拉格朗日(T.L.)和修正的拉格朗日(U.L.)表述^[5-11]两者之中进行的。T.L.表述也称为拉格朗日表述。在该解法中, 全部静态和运动学变量都参照于时间的初始位形。U.L.表述以在T.L.表述中使用的相同方法为基础, 但在求解时全部静态和运动学变量都参照于时间 t 的位形。T.L.和U.L.这两个表述都包括由大位移, 大转动和大应变引起的运动非线性效应, 但大应变特性是否已被适当地模拟, 则取决于指定的本构关系(见6.4节)。使用这个表述而不使用另一个表述的唯一好处取决于它是否有更好的数值效率。

利用式(6.37), 在T.L.表述中考虑的基本方程为

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (6.38)$$

而在U.L表述中为

$$\int_{\nu} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (6.39)$$

其中 ${}^{t+\Delta t}R$ 是式(6.14)中给出的外虚功。如上面所指出的,通过使关系式线性化可得到式(6.38)和式(6.39)的近似解。表6.2和6.3归纳了用来达到T.L.和U.L.表述中把运动方程线性化的关系式。这些平衡方程在T.L.表述中为

$$\int_{\nu} {}_0 C_{ijkl} e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} dV + \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} dV \quad (6.40)$$

而在U.L.表述中为

$$\int_{\nu} {}_0 C_{ijkl} e_{rs} \delta e_{ij} dV + \int_{\nu} {}^t \tau_{ij} \delta \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_{\nu} {}^t \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (6.41)$$

表6.2 全量拉格朗日表述

1. 运动方程

$$\int_{\nu} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$$

其中

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{\rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} x_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} x_{j,n}$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,l} + {}^{t+\Delta t} u_{l,k})$$

2. 增量分解

(a) 应力

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij}$$

(b) 应变

$${}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} + {}_0 e_{ij}, \quad {}_0 e_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}$$

$${}_0 e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}^t u_{k,l} + {}^t u_{l,k} - {}^t u_{k,l}), \quad {}_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0 u_{k,i} + {}_0 u_{k,j})$$

3. 带有增量分解的运动方程

注意到 $\delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} = \delta {}^t e_{ij}$ 和 $S_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$, 则运动方程是:

$$\int_{\nu} {}_0 C_{ijkl} e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} dV + \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} dV$$

4. 运动方程的线性化

用近似值

$${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijkl} e_{kl}, \quad \delta {}_0 e_{ij} = \delta {}_0 e_{ij}$$

我们得到近似的运动方程为

$$\int_{\nu} {}_0 C_{ijkl} e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} dV + \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{\nu} {}^t S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} dV$$

其中 ${}_0 C_{ijkl}$ 和 ${}_t C_{ijkl}$ 分别是参照于时间零和 t 的位形的时间 t 的增量材料特性张量。不同材料的 ${}_0 C_{ijkl}$ 和 ${}_t C_{ijkl}$ 的推导在6.4节中讨论。我们并可指出在式(6.40)和式(6.41)中 ${}^t S_{ij}$ 和 ${}^t \tau_{ij}$ 是已知时间 t 的第二Piola-Kirchhoff应力和Cauchy应力; ${}_0 e_{ij}$, ${}_0 \eta_{ij}$ 和 ${}_t e_{ij}$, ${}_t \eta_{ij}$ 则分别是参照于时间零和 t 的位形的线性和非线性增量应变。

表6.3 修正的拉格朗日表述

1. 运动方程

其中

$$\int_V {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{Q}$$

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = -\frac{1}{t+\Delta t} \frac{\rho}{\rho_0} ({}^t x_i - {}^{t+\Delta t} x_i) ({}^t x_j - {}^{t+\Delta t} x_j)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} = \delta \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + u_{k,i} u_{k,j})$$

2. 增量分解

(a) 应力

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}^t S_{ij} \quad (\text{注意 } {}^t S_{ij} \equiv {}^t \tau_{ij})$$

(b) 应变

$${}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij}$$

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}), {}^t \eta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k,i} u_{k,j})$$

3. 带有增量分解的运动方程

注意到 ${}^t S_{ij} = {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl}$, 则运动方程是:

$$\int_V {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{ij} dV + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{Q} - \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} dV$$

4. 运动方程的线性化

$$\text{用近似值 } {}^t S_{ij} = {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl}, \delta {}^t e_{ij} = \delta {}^t e_{ij}$$

我们得到近似的运动方程为

$$\int_V {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{ij} dV + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{Q} - \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} dV$$

比较表6.2和6.3中的U.L.和T.L.表述, 我们再次发现它们是十分类似的, 实际上这两种表述在理论上仅有的区别是对运动学变量和静态变量选择了不同的参考位形。如果在数值解法中运用了适当的本构张量, 则的确会得到相同的结果(见6.4节)。

还应指出, 表中所用的应力增量和应变增量的分解是唯一可能的, 因为在每一个解法中, 全部应力和应变都参照于同一个位形。

实际上, 在有限元解中选择U.L.或是T.L.表述取决于它们的相对数值有效性, 这也与所用的有限元和本构定律有关(见6.4节)。但是, 研究表6.2和6.3我们可得到一个有普遍意义的观察结果, 即在T.L.表述中的增量线性应变 e_{ij} 包括初始位移效应, 它导致了比U.L.表述更复杂的应变—位移矩阵。

式(6.40)和式(6.41)中线性化方程的右边包含有在式(6.14)中定义的外虚功 ${}^{t+\Delta t} \mathcal{Q}$ 。该表达式通常也与所考虑物体的表面积和体积有关。但为了简化讨论, 我们暂时假设荷载与变形无关, 作用方向和强度与结构响应无关的集中力是这类荷载的一个非常重要的形式。以后我们将讨论如何在分析中把与变形有关的荷载包括进去(见式(6.49)至式(6.50))。

关系式(6.40)和式(6.41)可用来计算位移的增量, 然后用该增量计算对应于时间 $t + \Delta t$ 的位移、应变和应力的近似值。把计算出的增量加到时间 t 的位移上, 就可得到对应于时间 $t + \Delta t$ 的位移的近似值, 并利用适当的运动学关系式(例如T.L.表述中的关系式(6.23))从位移中算出应变的近似值。但对应于时间 $t + \Delta t$ 的应力的计算却取决于所用的特定本构关系式, 这将在6.4节中详细讨论。

假设已得到了近似的位移, 应变和应力, 现在我们可以检查用时间 $t + \Delta t$ 的静态变量和

运动学变量算出的内虚功和外虚功之间的差别有多大, 通常预料要对用上标(1)标志的近似值进行迭代, 由线性化引起的误差在T.L.表述中为

$$E_{\text{error}} = {}^{t+\Delta t} \mathcal{P} - \int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(1)} \delta({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^{(1)}) dV \quad (6.42)$$

在U.L公式中为

$$E_{\text{error}} = {}^{t+\Delta t} \mathcal{P} - \int_{{}^{t+\Delta t} V^{(1)}} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij}^{(1)} \delta({}^{t+\Delta t} e_{ij}^{(1)}) dV \quad (6.43)$$

应当指出式(6.42)和式(6.43)的右边分别等价于式(6.40)和式(6.41)的右边, 但在每一种情况下都使用了带有相应的应力和应变的当前位形。在U.L.表述中可直接看出这种对应; 但对T.L.表述则必须看到当使用同一当前位移时, $\delta_0 e_{ij}$ 等价于 $\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 。

上面的考虑说明式(6.40)和式(6.41)中的右边代表在计算位移增量之前的“不平衡虚功”; 而(6.42)和式(6.43)的右边代表作为线性化结果求解之后的“不平衡虚功”。为了进一步减少“不平衡虚功”, 需要进行迭代。重复上面的求解步骤, 直至外虚功和内虚功的差别按一定的收敛尺度可以忽略为止。利用T.L.表述, 重复求解的方程, 当 $k=1, 2, 3, \dots$, 时为

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}_0 C_{ijkl} \Delta_0 e_{ij}^{(k)} \delta_0 e_{kl} dV + \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta \Delta_0 \eta_{ij}^{(k)} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{P} \\ - \int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^{(k-1)} dV \end{aligned} \quad (6.44)$$

利用U.L表述所考虑的方程为

$$\begin{aligned} \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}_t C_{ijkl} \Delta_0 e_{ij}^{(k)} \delta_0 e_{kl} dV + \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}_t S_{ij} \delta \Delta_0 \eta_{ij}^{(k)} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{P} \\ - \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij}^{(k-1)} dV \end{aligned} \quad (6.45)$$

其中 $k=1$ 的情况对应于关系式(6.40)和(6.41), 而位移按下式修正:

$${}^{t+\Delta t} u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t} u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)}, \quad {}^{t+\Delta t} u_i^{(0)} = {}^t u_i \quad (6.46)$$

关系式(6.44)至式(6.46)对应于在6.1节中介绍过的修正牛顿迭代法。迭代演算时不修正左边本构张量和应力张量的分量。下节将会看到这相当于在迭代过程中使用一个不变的正切刚度矩阵。

综上所述, 可以再次指出非常重要的一点, 我们的目的是求解平衡方程式(6.13), 可把它看成是线性分析中虚功原理的推广。对于通用的增量分析, 可有效地使用一定的应力和应变度量, 这就导致把式(6.13)变换成修正的及全量的拉格朗日形式。这些方程的线性化给出了关系式(6.44)和式(6.45)。无论式(6.44)或式(6.45)的解都与式(6.13)的解完全一致, 这一点是十分重要的。即只要使用适当的本构关系式, 用式(6.44)或式(6.45)求解均可得到相同的数值结果。并且, 如前所述, 用T.L.还是用U.L.表述实际上只取决于这两种解法的相对数值有效性。

到目前为止, 我们假设荷载与变形无关, 并可在增量分析以前指定。这样, 我们假设式(6.14)中的表达式可用下式算出

$${}^{t+\Delta t} \mathcal{P} = \int_{0V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i dV + \int_{0s} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i dS \quad (6.47)$$

这仅对某些荷载类型是可能的, 例如作为变形的函数、且方向不变的集中荷载。利用基于位移的等参单元, 可用式(6.47)模拟的另一种重要荷载情况是在动态分析中应包括的惯性力荷

载。此时可得

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \rho {}^{t+\Delta t} \dot{u}_i \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV = \int_{0V} {}^0 \rho {}^{t+\Delta t} \dot{u}_i \delta u_i {}^0 dV \quad (6.48)$$

这样就可由物体的初始位形算出质量矩阵。实际的结果是在动态分析中等参单元的质量矩阵可以在逐步求解之前算出。

现在假设外虚功与变形有关,且不能用(6.47)计算。如果在这种情况下荷载(或时间)步长足够小,使用对应于时间 $t + \Delta t$ 的荷载强度,但在迭代

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV = \int_{t+\Delta t V (k-1)} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV \quad (6.49)$$

$$\text{和} \quad \int_{t+\Delta t S} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i {}^{t+\Delta t} dS = \int_{t+\Delta t S (k-1)} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i {}^{t+\Delta t} dS \quad (6.50)$$

中对最新得到的体积和面积计算积分,就常常可使外虚功近似到足够的精度。为了得到更精确的近似解,式(6.49)和式(6.50)中未知的增量位移可以线性化,但这样做会产生不对称的刚度矩阵。如果加载步长很小并采用平衡迭代,这在计算上未必是有效的^[9]。

全量的和修正的拉格朗日表述都是增量连续介质力学方程,它包括全部由大位移,大应变和材料非线性引起的非线性效应,但在实际上,通常只考虑非线性材料的效应就够了。此时,在表述中非线性应变分量以及任何面积和体积的修正都被忽略不计。因此,式(6.44)和式(6.45)可简化为相同的运动方程,即

$$\int_V C_{ijkl} \Delta e_{ij}^{(k)} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{P} - \int_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)} \delta e_{ij} dV \quad (6.51)$$

其中 ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)}$ 是时间 $t + \Delta t$ 和迭代 $(k-1)$ 次后的实际应力。在该分析中,我们假设物体的体积不变,因此 ${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} = {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$, 而且不能有与变形有关的荷载。由于在(6.51)中没有考虑运动非线性,这就使得如果材料是线弹性的,则关系式(6.51)与4.2.1节中讨论过的虚功原理一致,并且会导致一个线性的有限元解。

在上面的表述中我们假设迭代是收敛的,因此可以确实完成增量分析。我们将在8.6节中详细讨论这一问题。另外,还假设在表述中进行静态分析或用隐式时间积分法进行动态分析(见9.2节)。如果用显式时间积分法进行动态分析,则连续介质力学控制方程在用T.L.表述时为

$$\int_{0V} {}^0 S_{ij} \delta {}^0 \varepsilon_{ij} {}^0 dV = {}^0 \mathcal{P} \quad (6.52)$$

而用U.L.表述时为

$$\int_{0V} {}^0 \tau_{ij} \delta {}^0 e_{ij} {}^0 dV = {}^0 \mathcal{P} \quad (6.53)$$

且用仅为材料非线性的分析时为

$$\int_V {}^t \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = {}^t \mathcal{P} \quad (6.54)$$

其中应力和应变张量定义如前,但考虑时间 t 的平衡。在这些分析中外虚功必须包括对应于时间 t 的惯性力,且增量解对应于不带平衡迭代的向前算法。9.2.1节详细讨论实际的逐步解法。